GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL II. No. 1 — 1 OCTOMVRIE 1935

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

GAZETA MATEMATICĂ

Cititorii *„Suplimentului cu exerciţii al Gazetei Matematice"*, cari nu cunosc *Gazeta Matematică*, această revistă matură ce îşi sărbătoreşte în prezent încheierea a 40 ani de neîntreruptă apariţie, sunt în chip totuşi firesc legaţi de sărbătorire.

Realizările *Gazetei Matematice*, pe tărâmul învăţământului matematic, în ţara noastră, şi pe acel al creaţiei matematice, sunt numeroase şi esenţiale.

Una dintre ultimele realizări este acest *„Supliment cu exerciţii"* al cărui scop a fost explicat de D-l Profesor ION IONESCU (Supl. cu ex. Nr. 1, Vol. I), unul dintre cei cinci întemeietori ai *Gazetei Matematice*.

După entuziasmul cu care a fost primit, după activitatea bogată şi rodnică, pe care a provocat-o, *Suplimentul* nostru credem că şi-a îndeplinit scopul în primul său an de apariţie. El va urma acelaş drum.

In celelalte realizări ale sale, *Gazeta Matematică* a răspuns deasemenea unor cerinţe ale mediului.

Insăşi apariţia *Gazetei Matematice* a fost cerută acum 40 de ani de absenţa spiritului matematic în ţara noastră, într'un secol când matematicele jucau în lume un rol preponderent, atât prin contribuţia lor la formarea intelectului, cât şi prin contribuţia la technică, la ştiinţele militare, la fizică, etc.

Prin apariţia ei, *Gazeta Matematică* a umplut o gravă lacună.

Există acum o puternică mişcare matematică în ţară, avem realizatori pregătiţi în technică şi în armată, puteri crescute din seva *Gazetei Matematice.*

Gazeta Matematică, prin concursurile sale anuale, prin diverse premii, a dat posibilitate corespondenţilor ei de a-şi afirma talentul.

A creiat, pentru desăvârşirea cunoştinţelor celor ce se interesau de matematici, *Biblioteca Gazetei Matematice*, cuprinzând Culegeri de probleme, Tratate de matematici, etc. şi *Biblioteca technică a Gazetei Matematice.*

Acum deschide în localul său, tinerilor dornici de mai multă cunoaştere matematică, biblioteca de cărţi şi reviste matematice.

Iată numai fragmente din realizările *Gazetei Matematice.*

E în sărbătorirea celor 40 de ani trecuţi, sărbătoarea unei munci impresionante, a unei munci oferită dezinteresat de membrii ei, e sărbătoarea sacrificiului făcut pentru cauza ştiinţei şi a patriei.

Numărul I al volumului XLI, număr festiv, conţine în 120 pagini, articole, note, probleme, exerciţii datorite membrilor fondatori ai *Gazetei Matematice* şi celor foşti corespondenţi în cursul celor 40 de ani.

Intr'un volum festiv, ce va apare în luna Octomvrie, se va arăta detailat realizările *Gazetei Matematice.*

Corespondenţii *Suplimentului cu exerciţii al Gazetei Matematice,* viitori matematicieni, militari, ingineri sau fizicieni, sunt cei mai tineri legaţi sufleteşte de aniversarea *Gazetei Matematice.*

COMITETUL DE REDACŢIE

EXERCIŢII REZOLVATE.

Clasa V-a. *Exerc. 73. In triunghiul* ABC *perpendiculara* D *ridicată pe mijlocul laturei* BC *întâlneşte latura* AB *în* M, *iar latura* AC *în* N.

1°. *Să se găsească două puncte* P *şi* Q *pe* D, *astfel ca patrulaterele* ABPN *şi* ACQM *să fie inscriptibile.*

2°. *Ce legătură există între punctele* P *şi* Q *şi ce raport au ele cu triunghiul* ABC? N. B.

Punctele P şi Q coincid cu centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Clasa VI-a. *Exerc. 47.* N *fiind un număr de* n *cifre, câte cifre ar putea avea* N^N?

I. L.

Avem:

$$10^{n-1} \leqslant N < 10^n$$

deci:

$$10^{(n-1)N} \leqslant N^N < 10^{n \cdot N}.$$

Prin urmare N^N ar putea avea un număr de cifre cuprins între: $(n-1) \cdot N$ şi $n \cdot N$.

VI. 71. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$4\cos^2 x - 1 = \sqrt{3}\sin x + \cos x + 2.$$

N. B.

Vom avea succesiv:

$$2\cos^2 x - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

$$\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

Deducem grupurile de soluţiuni:

(1) $$\frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + x$$

(2) $$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \frac{\pi}{6} + x + 2k\pi.$$

Deci:

$$x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{3}.$$

VI. 74. Dacă ecuaţiunea

$$x^2 + px + q = 0$$

admite rădăcinile $\sin\alpha$ *şi* $tg\beta$, *ce relaţii trebue să existe între coeficienţii* p, q, p', q', *pentru ca ecuaţia*

$$x^2 + p'x + q' = 0$$

să admită rădăcinile $\cos\alpha$ *şi* $\operatorname{cotg}\beta$.

N. B.

Să notăm:

$$x_1 = \sin\alpha \quad , \quad x_2 = tg\beta \quad , \quad x'_1 = \cos\alpha \quad , \quad x'_2 = \operatorname{cotg}\beta .$$

Intre aceste 4 cantităţi avem următoarele 6 relaţii:

(1) $x_1 + x_2 = -p$ (3) $x_1 x_2 = q$ (5) $x_1^2 + x_1'^2 = 1$.

(2) $x'_1 + x'_2 = -p'$ (4) $x'_1 x'_2 = q'$ (6) $x_2 x'_2 = 1$.

Rezultatul eliminării a 4 cantităţi x_1, x_2, x'_1, x'_2 între 6 relaţii (1), (2), (3), (4), (5), (6) va fi compus din două relaţii pe care le vom căuta.

Inmulţind (3) cu (4) şi ţinând seama de (6), obţinem:

(7) $$x_1 x'_1 = qq' .$$

şi înmulţind (1) cu (2), vom avea:

$$(x_1 + x_2)(x'_1 + x'_2) = p.p' .$$

sau:

$$x_1 x_2^1 + x_2 x'_1 = pp' - qq' - 1.$$

Dar s'a arătat (Suplimentul G. M. An. I. Nr. 4, pag. 27) că:

$$x_1 x'_2 + x_2 x'_1 = \frac{pp' \pm \sqrt{(p^2 - 4q)(p'^2 - 4q')}}{2} .$$

Rezultă astfel relaţia:

$$\frac{pp' \pm \sqrt{(p^2 - 4q)(p'^2 - 4q')}}{2} = pp' - qq' - 1$$

sau:

(I) $$(p^2 - 4q)(p'^2 - 4q') = (pp' - 2qq' - 2)^2 .$$

Din (5) şi (7) deducem :

$$x_1 + x'_1 = \pm \sqrt{1 + 2qq'} .$$

Apoi din (1), (2), (3) şi (4), scoatem prin operaţii elementare :

$$x_1 + x'_1 + x_2 + x'_2 = -(p + p').$$

Deci :

$$x_2 + x'_2 = -p - p' \pm \sqrt{1 + 2qq'} .$$

Apoi :

$$x_1 x_2 (x'_1 + x'_2) + x'_1 x'_2 (x_1 + x_2) = -pq' - p'q$$

sau :

$$x_1 x'_1 (x_2 + x'_2) + x_2 x'_2 (x_1 + x'_1) = -pq' - p'q$$

sau însfârşit :

$$(II)\ qq' (p + p' \pm \sqrt{1 + 2qq'}) \mp \sqrt{1 + 2qq'} = pq' + p'q.$$

Clasa VII-a. *Exerc. 52. Se dă sistemul*

$$x + 2y + \alpha z = 1$$
$$x + \alpha y + 3z = 2$$
$$\alpha x + 2y + 3z = 3$$

1°. *Pentru ce valoare a lui* α *avem :* $x = y = z$.

2°. *Mai general, pentru ce valoare a lui* α *putem avea :*

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

şi, în acest caz, ce relaţie trebue să existe între a, b. c.

G. D. S.

Să punem : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{1}{k}$.

Vom avea pe x, y, z cunoscând pe k. Aceasta va fi noua necunoscută. Sistemul dat devine :

$$\begin{cases} k - \alpha c = a + 2b \\ 2k - \alpha b = a + 3c \\ 3k - \alpha a = 2b + 3c. \end{cases}$$

Ajungem la un sistem de 3 ecuații cu 2 necunoscute. Eliminantul va trebui să fie nul, deci condiția este:

$$4(b^2 - c^2) = (a + b + c)(a - c).$$

$$\alpha = \frac{a + 4b - 3c}{b - 2c}.$$

Pentru $a = b = c = 1$ avem: $\alpha = -2$.

VII. 55. Să se rezolve sistemul:

$$(d - a)x + (d - b)y + (d - c)z = a(b - c)$$
$$(d - b)x + (d - c)y + (d - a)z = b(c - a)$$
$$(d - c)x + (d - a)y + (d - b)z = c(a - b).$$

N. B.

Rădăcinile sistemului sunt:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(a-c)+(b-c)^2} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{b(c-a)(b-c)-c(a-b)^2}{(a-b)(a-c)+(b-c)^2} = \frac{3abc - ab^2 - bc^2 - ca^2}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{b(c-a)^2-c(a-b)(b-c)}{(a-b)(a-c)+(b-c)^2} = \frac{a^2b + b^2c + c^2a - 3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

VII. 58. Să se rezolve sistemul:

$$(d - a)x + (d - b)y + (a - b)z = 0$$
$$(d - b)x + (d - c)y + (b - c)z = 0$$
$$(d - c)x + (d - a)y + (c - a)z = 0.$$

N. B.

Sistemul este linear și omogen. Determinantul sistemului

$$\begin{vmatrix} d-a & d-b & a-b \\ d-b & d-c & b-c \\ d-c & d-a & c-a \end{vmatrix}$$

este nul, deoarece elementele ultimei coloane sunt egale cu diferenţele elementelor primelor coloane. Deci sistemul admite pentru x, y, z şi soluţiuni diferite de zero.

Vom avea:

$$\frac{x}{(d-b)(b-c)-(d-c)(a-b)} = \frac{y}{(a-b)(d-b)-(b-c)(d-a)}$$

$$= \frac{z}{(d-a)(d-c)-(d-b)^2}$$

sau:

$$x = -y = z$$

Până la 15 Septemvrie s'au primit soluţiuni bune pentru exerciţiile publicate în numerele 7, 8, 9 dela: [1]).

Şcoala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu" Bucureşti.

Clasa IV-a: Iosif St. Madeleine (IV: 70, 72).

Clasa V-a: Lupu N. Maria (V: 66, 84*, 85, 87*, 88*, 90*, 99), Nasta Amelia Gabriela (V: 66*, 67*, 68*, 69*, 70*, 72, 73*, 76*, 77*, 79*, 80*, 84*, 87*, 88*, 90*, 91*, 92*, 93*, 94*, 95*), Romaşcan Georgeta (V: 66, 84*, 85, 87*, 88*, 90*, 99).

Clasa VI-a: Mazilu Dacia (VI: 47*, 48, 49, 52*, 53*, 56*, 57*, 71) Sotir G. E. (VI: 48).

Liceul de fete „Regina Maria" Bucureşt.

Clasa III-a: Cohn Lidia (IV: 73*, VII: 75), Păiş C. Nina (V: 69).

Clasa V-a: Nichifor G. Antoanetta (V: 66*, 67*, 68*, 69*, 70*, 72, 73*, 77*, 79*, 80*, 82*, 91*).

Clasa VI-a: Tănăsescu Venera (VI: 47, 48, 74*, 79*, 80*, 81*, 82*, 83*, 84*, 85*, 86*, 87*, 88*, 89*, 90*, 91*, 92*).

Liceul de fete „Domniţa Ileana" Bucureşti.

Clasa VI-a: Putineanu E. (VI: 48).

Liceul de fete „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa III-a: Buzescu Claudia Georgeta (IV: 70).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine. Se adaugă şi soluţiile bune ale exerciţiilor anterioare numerelor 7, 8, 9, sosite la timp, dar din diferite motive, nepublicate.

Externatul Ortodox „Zoe Romniceanu" Bucureşti.

Clasa VI-a: Lazarovici R. (VI: 48), Rociu Margareta (VI: 48, 74, 80, 81, 82, 83).

Clasa VII-a: Ionescu Oana (VII: 56, 57, 60, 63*).

Institul Ortodox Internat.

Clasa VII-a: Otetelişanu R. (VII: 41).

Liceul de fete „Despina Doamna" Ploeşti.

Clasa IV-a: Petrescu Mietta (IV: 67, 68*, 73*, 77).

Liceul de fete „Ecaterina Urziceanu" Craiova.

Clasa VI-a: Vlădescu Ivonne (VI: 44, 48, 77, 78, 86, 87, 88*, 91).

Şcoala Normală „Andrei Şaguna" Sibiu.

Clasa V-a: Ionescu G. Laetiţia (V: 69*, 70*, 72, 79*, 80*, 92, 93, 94).

Liceul „Dr. Angelescu" Buzău.

Clasa VII-a; Ionescu G. Filofteia (VII: 57*, 58, 60, 63*).

Şeminarul Pedagogic „Titu Maiorescu" Bucureşti.

Clasa IV-a: Bodnărescu H. (IV: 62, 70, 71*, 72*, 73*, 74*, 75 77, V: 77*, 79, 81*, 84*, 87*, 88*, 91, 92, 93, 94, 95, VI: 87), Tănăsescu H. (IV: 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68).

Colegiul Naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa IV-a: Ciurescu R. (IV: 57, 70).
Clasa V-a: Stroescu M. (V: 67*, 69*, 70*, 84*, 86, 87, 88, 94, 95).
Clasa VI-a: Dumitriu G. (VI: 49).
Clasa VII-a: Neagu V. V. (VII: 60).

Liceul „G. Lazăr" Bucureşti.

Clasa V-a: Drouhet E. (V: 68, 69*, 70*, 78*, 79, 81*, 83, 84*, 85*, 88*, 90*, 93*, 94*. 95*), Munroe M. (V: 56*, 57*, 58*, 59*, 66, 67*, 68*, 69*, 70*, 71, 72, 73*, 79*, 80*, 81*, 82*, 85*, 86*, 87*, 88*, 90*, 91*, 92*, 93* 94*, 95*), Segal B. (V: 66, 67, 68, 69*, 70*, 79*, 80*, 84, 85, 87*, 88*, 91, 93, 94).

Clasa VI-a: Ballan M. (VI: 48, 49), Băzdoacă P. (VI: 49), Drăghicescu M. (VI: 48, VII: 48), Iordache C. (VI: 48), Nicolescu A. (VI: 48), Petrescu M. S. (VI: 52*, VII: 44), Rotstein M. C. (VII: 48), Schramm B. (VI: 49).

Liceul „Matei Basarab“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Horodniceanu S. (IV: 61, 64*, 65, 66*, 67, 68).

Clasa V-a: Hasan M. (V: 56, 57), Preciado T. (V: 69, 70, 77*, 79, 80, 81, 82, 84*, 85, 87*, 88, 90*, 91, 92, 93, 95), Şaichin A. (47, 73, 77, 82, 86, 87, 90).

Clasa VI-a: Gregore S. A. (VI: 78, 82, 86, 87, 90).

Liceul „G. Şincai“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Ene F. C. (VI: 43*, 48, 49, 71, 73*, 75*, 76, 77, 78, 80*, 82*, 83*, 86, 87, 88*, 90*, VII: 41, 42), Perieţeanu D. M. (VI: 43, 82*, 83, 86, 87).

Clasa VII-a: Ene F. I. (VII: 39*, 55*, 73*).

Liceul „Mihai Viteazul“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Friedmann S. (IV: 61, 64, 65, 66, 67), Grozdea M. (IV: 64, 65, 66, 67, 68), Horezeanu M. S. (IV: 64, 65), Serdici G. (IV: 64, 66),

Clasa V-a: Bally N. (V: 66, 93).

Clasa VI-a: Cristescu G. (VI: 49, 71), Sal D. I. (VI: 43), Ştefănescu C. (VI: 48).

Liceul „Cantemir Vodă“ Bucureşti.

Clasa V-a: Capriel I. A. (V: 66, 69, 70, 84, 85*, 86*, 87*, 88*, 91*, 93*, 95).

Clasa VI-a: Georgescu N. (VI: 47, 73, 74, 77, 78, 82, 83, 86, 87, 90, 91).

Liceul „Aurel Vlaicu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Fulga L. T. (IV: 61, 62, 63, 70, 73*), Horvat S. (IV: 68*).

Clasa VI-a: Buzescu P. A. (VI: 48, 81, 82, 83).

Liceul „Mihail Eminescu“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Pomponiu L. L. (VI: 43).

Liceul „Sf. Iosif“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Geller M. (IV: 51, 64, 65. 66, 67).

Liceul „Codreanu“ Bârlad.

Clasa V-a: Ciorăscu G. (V: 33*, 37, 38, 39*, 46*, 47, 50), Palade Georgian (V: 33*, 37, 38, 39*, 46*, 47), Vasiliu Eugen (V: 33*, 37, 38, 39*. 46*, 47, VI: 52*, 53*, 54*).

Clasa VI-a: Edelştein Lewy (VI: 52*, 53*, 54, 77, 78, 87), Spanache I. (VI: 53*, 54*).

Clasa VII-a: Ivănescu I. (VII: 44, 45*, 46*, 47*), Nathansohn I. (VII: 46*, 47*), Ştefănescu S. (VII: 35).

Liceul „Samuil Vulcan" Beiuș.

Clasa IV-a: Bard St. (IV: 32*).

Clasa V-a: Hera I. (VI: 52*), Teiușan I. I. (V: 84, 93, 94, VI: 52*, 53*, 54*), Wittenberger R. (VI: 52*, 54*).

Clasa VI-a: Chirvoiu V. (VI: 48, 52*, 53*, 54*, 57*, 77*, 82*, 83, 86, 87, 90, 91, VII: 44*), Hompola T. (VI: 48, 52*, 53*, 54*, 56, 57*, 60*, VII: 48), Ioja F. S. (VI: 52*, 53*), Marica P. (VI: 48, 52*, 53*, 54*, 57*, 77*, 78*, 82, 83*, 85*, 86*, 87*, 90*), Marțian M. (VI: 48, 52*, 53*, 54*, 57*, 75), Sinesie F. (VI: 77).

Clasa VII-a: Popa H. (VII: 42).

Liceul „N. Bălcescu" Brăila.

Clasa VII-a: Goldenberg I. M. (VII: 48).

Liceul „B P. Hasdeu" Buzău.

Clasa IV-a: Nicolau M. (IV: 73*, 74*, V: 70*, 76*).

Clasa V-a: Nicolau L. (V: 70, 81, 83*, 88*, 90*, 92, 93*, 94, 95).

Liceul „Laurian" Botoșani.

Clasa IV-a: Demetrian Cezar (IV: 64, 67, 68), Sârbu V. (IV: 41).

Clasa V-a: Baras M. (V: 41*), Ciomaga I. I. (V: 69, 93, 95).

Clasa VI-a: Bajureanu G. (VI: 52*, 54*), Șoiman T. (VI: 52*, 53*, 54*).

Clasa VII-a: Gafencu A. N. (VII: 56, 57, 60, 61, 65*, 71*, 73).

Liceul „Gh. Barițiu" Cluj.

Clasa V-a: Nițescu Gh. (VI: 52*, 54*, 57*, 60*).

Seminarul Pedagogic Universitar Cluj.

Clasa IV-a: Borza A. (IV: 32), Florian Tiberiu (VI: 54*), Kauntz I. (IV: 32*, 41, VI: 52*, 53*), Voianu T. (IV: 32*).

Colegiul Național „Carol I" Craiova.

Clasa III-a: Alexandrescu M. (V: 41*, 42*), Dinculescu M. (IV: 32).

Clasa IV-a: Bărbulescu G. (IV: 32), Cicei Cetate (V: 46, 47*, 48, 49*, 50*, VI: 52*), Georgescu B. (V: 40*, 41*), Oprișan M. (IV: 32*, 61, 64, 65, 66, 73, V: 40*, 41*, 42*), Peterea V. (IV: 32*, V: 40*), Popescu Octavian (IV: 61, 70, 71, 73*, V: 33, 37, 38*, 39*, 40*, 41*, 42*, 61, 67, 69, 70, VI: 52*), Stoianovici M. (IV: 32, V: 42*).

Clasa V-a: Bărbulescu C. (V: 33, 37), Brândușoiu P. (V: 46, 47*, 56, 58, 59), Frăsie S. (V: 56, 57, 59), Hortopan V. (56, 58*, 59*), Lustig R. (V: 33, 37, 38), Mitroiu A. (V: 33, 37, 38, 39*, 40*, 41*, 42*, 46, 53*, 55*), Niculescu S. (V: 33, 37, 38), Predescu C. (V: 33, 37), Predescu St. (V: 56, 58*, 59*), Preduț I. (V: 33, 37, 38, 47*, 56, 58, 59), Strâmbeanu St. (V: 40*, 41*, 49*).

Clasa VI-a: Bugeanu P. (VI: 47*, 48, 49).

Clasa VII-a: Avrămoiu E. (VII: 44, 46, 47), Cercelaru D. (VII: 41, 44, 46, 47), Chivulescu M. (VII: 41), Fira G. (VII: 44, 46, 47), Marica N. (VII: 44, 46, 47), Moisovici S. (VII: 44. 46, 47), Stamatin S. M. (VII: 44, 46, 47), Tănăsescu N. I. (VII: 39*, 44, 45*, 46*, 47, 48, 52), Truşculescu P. (VII: 44, 46, 47), Turcu V. (VII: 44, 46, 47), Tutunea P. (VII: 44, 45*, 46*, 47*), Vâlsănescu I. (VII: : 46, 47).

Liceul „Fr. Buzeşti" Craiova.

Clasa VII-a: Amărăşteanu F. M. (VII: 55*, 56, 57, 58*, 60, 61).

Liceul „Dinicu Golescu" Câmpu-Lung Muscel.

Clasa VII-a: Popescu V. F. (VII: 52, 60).

Liceul „B. P. Hasdeu" Chişinău.

Clasa VI-a; Sebel I. (VI: 47*, 48).

Liceul „Mircea cel Bătrân" Constanţa.

Clasa VII-a: Pambucdjian K. (VII: 56).

Liceul Corabia.

Clasa VII-a: Cardara G. (VII: 56, 57, 60).

Liceul „Unirea" Focşani.

Clasa VI-a: Focşeneanu S. (VI: 48).
Clasa VII-a: Nadolu A. (VII: 41).

Liceul „V. Alexandri" Galaţi.

Clasa IV-a; Nicolau Mircea (IV: 64, 66), Toussaint Gh. (IV: 64, 65 66, 67, 68*).

Liceul „Cuza Vodă" Huşi.

Clasa VI-a; Chiriac Simion (VI: 53, 77, 78, 82).

Liceul Internat Iaşi.

Clasa IV-a: Inculeţ I. Ionel (VI: 61, 64, 65, 66, 67, 68*), Danţu T. (IV: 62, 63, 78).
Clasa VI-a: Matei Dumitru (VI: 73*, 80*, 82, 83).

Liceul „Coriolan Brediceanu" Lugoj.

Clasa V-a: Sedmik Velimir (V: 66*, 68, 69, 70, 84*, 85*, 86*, 87*, 88*, 91, 92, 93*, 94), Stamate Ionel (V: 56*, 57*).
Clasa VI-a: Berinde V. T. (VI: 86, 87).

Liceul „T. Dumitrescu“ Mizil.

Clasa IV-a: Ionescu Traian (IV : 61, 64, 66, 67).
Clasa VI-a: Grigorescu A. T. (VI : 48).

Liceul „I. Brătianu“ Pitești.

Clasa V-a: Arsenescu Gheorghe (V : 66, 69, 77, 79, 80, 84, 88*, 93, 95).

Liceul „Regele Ferdinand“ Râmnicul-Sărat.

Clasa IV-a: Gheorghiu Petre (IV : 61, 64, 65, 66, 67, 68).

Liceul „Roman Vodă“ Roman.

Clasa V-a: Popa V. (V : 56*, 57*).
Clasa VI-a: Rosenberg I. (VI : 57*, VII : 41).

Liceul „D. Sturdza“ Tecuci.

Clasa VII-a: Andonie M. (VII : 44, 46*).

Liceul „Diaconovici Loga“ Timișoara.

Clasa IV-a: Ciugudean Caius (V : 67).
Clasa VI-a: Ciani I. (VI : 52*, 53*).

Liceul „Durostor“ Silistra.

Clasa VII-a: Topsacalian A. A. (VII : 48*, 52).

Liceul „Banația“ Timișoara.

Clasa VII-a: Müller I. (VII : 48*).

Liceul Conf. Izraelit Timișoara.

Clasa VI-a: Vermeș P. (VII : 48*, 52*).

Elevi Particulari.

Clasa IV-a: Mihăiescu-Nigrim W. (IV : 32*, VI : 52*).

Liceul Militar „Regele Ferdinand I“ Chișinău.

Clasa VII-a: Millu N. (VII, 45*, 46, 47).

Liceul militar „Ștefan cel Mare“ Cernăuți.

Clasa IV-a: Alexandrescu P. (IV : 41), Bârgăuanu M. (IV : 41), Breteanu C. (IV : 41), Dumitrescu P. (IV : 41). Metz M. (IV : 41), Șerbănescu Ș. (IV : 41), Stănescu V. (IV : 41). Vasiliu N. (IV : 41).

Clasa V-a: Apostol N. (V : 46, 48, 49*, 50, 54, 56*, 58*, 59*, VI : 52), Arsenescu I. (V : 53), Bancea N. (V : 58*, 59*), Bosinceanu G. (V : 48*, 56*, 58*, 59*), Boșoldea G. A. (V : 48*, 56*, 58*, 59*), Cruțescu T. (V : 46*, 50*, VI : 52*), Curcă C. (V : 56*), Floareș A. (V : 46, 47, 50*, 53*, 56*, 58*, 59*, VI : 52*), Gheorghiu A. (V : 58*), Ionescu M. (V : 56), Mazilu G. (V : 48*, 56*), Minaciu N. (V : 48*, 54, 55*), Mititelu C. (V : 46, 50*, VI : 52*), Nedelcu N. (V : 46, 47, 48*, 49*, 50*, 54, 55, 56*, 58*, 59*, VI : 52), Nicolaescu T.

(V : 48*, 54, 56*, 58*, 59*), Nistorescu D. (V : 53*), Popa B. (V : 56*, 58*, 59*), Russu E. (V : 46, 50, VI : 52*), Ştefănescu G. (V : 48*, 53*, 54*, 56*, 58*, 59*), Tomescu T. (V : 54, VI : 52*), Vasiliu N. (V : 56*, 58*, 59*), Vieru M. D. (V : 48*).

Clasa VI-a : Caraman V. (VI : 52*, 54*, 83), Lefter T. G. (VI : 83), Vasilescu G. (VI : 52*, 57*).

Clasa VII-a : Boitan N. (VII : 44, 45*, 57, 60, 61*), Cehan G. A. (VII : 48*, 52*), Craiu S. P. (VII : 48*, 52), Cristea E. (VII : 44, 45*, 46*, 60), Dumitrescu Argeş P. (VII : 46*), Gorgoiu N. (VII : 44, 45*, 46*), Maftei C. (VII : 44). Mâgală G. (VII : 44, 45*, 46), Maxim I. (VII : 45*, 46*), Moganu V. (VII : 60), Opran C. (VII : 44, 45*, 46), Roman I. N. (VII : 39*, 44, 45*, 46, 47*, 55, 57, 60), Rothemburg A. (VII : 45*), Stănciulescu G. (VII : 44, 45*, 46, 60), Vusatiuc D. M. (VII : 39*), Zgârcea G. (VII : 48*).

Liceul militar „Craiova".

Clasa V-a : Dragomirescu I. (V : 37*, 38, 39*, 41*, 42*, 46*, 47*, 50*, 54*, 55*), Drăguşin D. (V : 41*, 42*), Grigore I. (V : 46*, 47, 50, 53*, 57, 58*, VI : 52*, 53*, 54*), Ionescu F. C. (V : 33, 37*, 38. 40, 41*), Poşoi M. (V : 47, 49*, 50*, 53*, 56*, 57, 58*, 59).

Clasa VII-a : Andronic S. M. (VII : 52), Avram I. (VII : 45*, 46), Benea A. (VII : 45*), Berculescu (VII : 45*, 52), Busuioc I. (VII : 46, 52), Catrina C. (VII : 45*, 46), Cavaropol M. (VII : 45*), Cavaropol N. (VII : 42, 45*), Cioc L. A. (VII : 45*), Ciortea G. (VII : 44, 45*, 46), Coltofeanu A. (VII : 45*, 46), Comănescu Toma (VII : 56, 57, 73, 74), Cristescu I. (VII : 45*, 46), Cuna S. (VII : 39*, 45*), Drăghicescu I. (VII : 46) Dumitrescu A. (VII : 42), Dumitrescu M. (VII : 46), Dumitru I. I. (VII : 35), Dulămiţă G. I. (VII : 52), Georgescu I. I. (VII : 39*), Iliescu V. D. (VII : 48), Ionescu I. (VII : 45*), Iordache N. (VII : 45*, 46), Iosub T. (VII : 45*), Mihai Gh (VII : 45*, 46), Mihăilescu I. (VII : 45*, 47*), Milcoveanu C. (VII : 42), Parisianu M. (VII : 45*, 46), Pestriţu M. (VII : 45*, 46*), Sârbu V. (VII : 46, 47*), Savin I. (VII : 45*), Teişanu S. (VII : 35*, 39*, 48), Vasilescu M. (45*).

Liceul militar „Iaşi".

Clasa IV-a : Jipa A. (IV : 41).

Clasa VI-a : Bogdan G. I. (VI : 49, 52*, 53*), Bucur N. V. (VI : 49), Dimitriu I. C. (VI : 52*, 53*), Dumbrăveanu D. (VI : 53*), Isac D. (VI : 52*, 53*, 54*, 56, 57*).

Liceul militar „N. Filipescu" Târgovişte.

Clasa II-a : Crăciunescu Marcel (IV : 73*, 74*, 75, 76*, 77*, V : 84*, 85*, 86*, 87*, 88*, 90*, 91*, 92*, 93*, 94*, 95*, VI : 86*, 87*, 88*, 90*, 92*, VII : 73*, 74*).

Clasa IV-a : Florescu Victor (IV : 43, 70, 72, 73*, 77, V : 68, 93, 95, VI : 54*, 81*, 83, 88*, 89*), Manolescu N. (V : 59) Rădulescu O. (V : 50*, 56*, 59*).

Clasa V-a: Belloiu D. (V : 47, 50*), Constantinescu A. (V : 41*), Dobre T. (V : 37*, 38*, 46*, 47*, 50*, 56*, 57*, 58*, 59*), Nicolaescu C. (V : 41*), Ştefănescu C (V : 47, 59*), Toma N. N. (V : 69, 70).

Clasa VII-a: Dascălu G. I. (VI : 48*), Lăzăroiu R. (VII : 60*, 61*, 63*).

Liceul militar „Mihai Viteazu" Tg. Mureş.

Clasa II-a: Păuţa Moise (IV : 64, 65, 66, 68*).

Clasa IV-a: Bejenaru Victor (IV : 41, 61, 62, 65, 66, 68*), Broşteanu (IV : 32), Dobrescu Gh. (IV : 61, 65, 66, 67, 68*), Păunescu V. (IV : 32), Săndulescu I. I. Olt (IV : 61, V : 57, 59), Ştefănescu Aurel (IV : 61, 68*)

Clasa V-a: Bădescu Ion (V : 66, 69), Balinski G. (V : 56), Banciu C. (VI : 52*, 79), Buiculescu R. (V : 56), Cârsteanu S. (V : 56), Dâlban G. (V : 50, 56, 58, 67, 68, 70, 79* 84, 88), Hurezeanu C. (V : 56, 57, 58), Isac V. (V : 46*, 58), Matei V. (V : 33, 46, 47, 59, 66), Munteanu L. (V : 33, 46, 47, 50, 56, 58, 59), Mosora N. (V : 66, 69, 70), Nicolae Toma (V : 66), Rovenţa O. (V : 33, 50, 56, 58, 59), Terpu T. (V : 57), Zlatan C. (V : 56).

Clasa VI-a: Matei I. I. (VI : 43*, 77*, 78*, 82*), Stoian I. I. (VI : 86, 87), Vasu A. N. (VI : 43*, 82).

Clasa VII-a: Deceanu G. (VII : 60, 61, 62, 63*).

EXERCIŢII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 78.* Să se calculeze :

$$E = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{99}}} + \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{101}}}.$$

C. I. B.

IV. 79. Să se calculeze valoarea numerică a expresiunii :

$$E = (x+10)(x+20) + (x+20)(x+30) - 2(x+30)(x+10)$$

pentru :

a) $x = 1$, *b)* $x = 0$, *c)* $x = 100$, *d)* $x = 12345$, *e)* $x = \frac{98}{99}$

C. I. B.

IV. 80. Să se afle valoarea numerică a expresiunii:

$$E = \sqrt{a + b\sqrt{c + d}} + \sqrt{a - b\sqrt{c - d}}$$

pentru:

$$a = b = c + 4 = d + 5 = 9.$$

C. I. B.

IV. 81. Să se calculeze valoarea numerică a expresiunii:

$$E = \frac{\sqrt{b\sqrt{c+d} - a} - \sqrt{b\sqrt{c-d} + a}}{\sqrt{a + b\sqrt{c+d}} + \sqrt{a - b\sqrt{c-d}}}.$$

C. I. B.

IV. 82. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Tangentele în A ale cercurilor AMB şi AMC tae respectiv paralelele duse prin M la AC şi AB în B' şi C'. Să se arate că dreptele B'C' şi BC sunt paralele.

C. I. B.

IV. 83. Fie M un punct pe latura BC a triunghiului ABC. Tangentele în M la cercurile AMB şi AMC tae respectiv dreptele AC şi AB în C' şi B'.

Să se arate că B'C' e paralelă cu BC.

C. I. B.

IV. 84. Prin vârful A al dreptunghiului ABCD se duce dreapta Ax, paralelă la diagonala BD.

Să se demonstreze că AD este bisectoara unghiului xAC.

Gh. B.

IV. 85. Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând raza cercului circumscris, înălţimea AA' şi unghiul pe care-l face BC cu diametrul ce trece prin A al cercului circumscris triunghiului.

Gh. B.

IV. 86. Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând raza cercului circumscris, lungimea bisectoarei AA' şi unghiul pe care-l face BC cu diametrul ce pleacă din A în cercul circumscris triunghiului.

GH. B.

IV. 87. Picioarele bisectoarelor unghiului A al triunghiului ABC se proectează în A', A'' pe diametrul AO al cercului circumscris triunghiului. Să se demonstreze că A'A'' este egală cu dublul înălţimei ce pleacă din A.

GH. B.

Clasa V-a. *Exerc. 100.* Să se arate că dacă notăm cu:

$$A = (1+\sqrt{2})\,a + (1-\sqrt{2})\,b\ ,\ B = (1-\sqrt{2})\,a + (1+\sqrt{2})\,b$$

atunci avem:

$$(2+\sqrt{2})\,A + (2-\sqrt{2})\,B = 8a$$

$$A^2 + 6AB + B^2 = 32ab.$$

GH. TH. GH.

V. 101. Să se arate că:

$$(a^2+b^2)(a^2b^2+1) + 2ab(a^2+1)(b^2+1) + 4a^2b^2 \equiv (a+b)^2(ab+1)^2.$$

N. B.

V. 102. Să se verifice identitatea:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) + abc\left(a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\right)$$

$$\equiv \frac{(abc+1)(ab+c)(bc+a)(ca+b)}{abc}.$$

N. B.

V. 103. Să se demonstreze identitatea :

$$abc\left(a^2+b^2+c^2-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)$$

$$-(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)+2abc$$

$$\equiv\frac{(abc-1)(ab-c)(bc-a)(ca-b)}{abc}.$$

N. B.

V. 104. Fie dat polinomul :

$$P(x)=x^4-10x^3+35x^2-50x+24.$$

Să se arate că

$$P(1)=P(2)=P(3).$$

Şi apoi să se descompună în produs de factori de gradul I.

C. I. B.

V. 105. Fie dat polinomul :

$$P(x)=x^3-3ax^2+(3a^2-b^2)x+b^2(a+b).$$

1. Să se arate că :

$$P(a-b)=P(a)=P(a+b).$$

2. Să se deducă descompunerea în factori de gradul I a polinomului

$$Q(x)=x^3-3ax^2+(3a^2-b^2)x-a(a^2-b^2).$$

C. I. B.

V. 106. Să se calculeze valoarea expresiunii :

$$E=\frac{x^6-12x^4+48x^2-64}{x^4+56x^3-360x^2+736x-496}$$

pentru $x=2$.

C. I. B.

V. 107. Intr'un triunghiu dreptunghiu ABC, mediana corespunzătoare catetei AB este egală cu cateta.

Să se arate că raportul dintre ipotenuză şi cealaltă catetă este $\sqrt{\frac{7}{3}}$.

C. I. B.

V. 108. Mediana AA' şi înălţimea BB' din triunghiul ABC se întâlnesc în M. Să se demonstreze că dacă

$$\overline{B'C} = 2\overline{B'A}$$

M este la mijlocul lui AA' şi reciproc.

GH. B.

V. 109. Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând unghiul pe care-l face BC cu diametrul AO al cercului său circumscris, distanţa între piciorul bisectoarei şi al înălţimei ce pleacă din A şi lungimea medianei AM.

GH. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 93.* Să se rezolve sistemul

$$(a-3)x+(a+2)y+(a+1)z=a$$
$$(b-3)y+(b+2)z+(b+1)x=b$$
$$(c-3)z+(c+2)x+(c+1)y=c$$

presupunând: $a+b+c\neq 0$.

C. I. B.

VI. 94. Să se rezolve inecuaţia:

$$\frac{x}{12}-\frac{5x}{21}-\frac{1}{7}>-\frac{3x}{28}+\frac{3}{35}.$$

O. N. Ţ.

VI. 95. Să se rezolve sistemul de inecuații:

$$x - \frac{5x}{12} < \frac{7x}{20} - \frac{8}{15}$$

$$-\frac{3x}{10} + 1 > \frac{2x}{5} - \frac{7}{6}.$$

O. N. Ț.

VI. 96. Să se rezolve inegalitatea:

$$-5x^2 + 7ax - a^2 > 0.$$

Discuție.

O. N. Ț.

VI. 97. Să se descompună în produs de factori expresiunea:

$$E = a^6 + a^5 + a^4 + 2a^3 + a^2 + a + 1.$$

C. I. B.

VI. 98. Să se determine pentru diferitele valori ale lui *m*, natura rădăcinilor ecuației:

$$2mx^4 - (3m + 2)\,x^3 - (m - 5)\,x^2 - (3m + 2)\,x + 2m = 0.$$

G. D. S.

VI. 99. Fie ABCD un trapez, E și F mijloacele laturilor neparalele AB, DC — G un punct pe DE, astfel ca $\overline{DG} = 2\overline{GE}$ și H un punct pe BF, astfel ca $\overline{BH} = 2\overline{HF}$.

Să se arate că dreapta GH e paralelă cu diagonala AC.

C. I. B.

VI. 100. In trapezul ABCD laturile AB și CD sunt paralele. Un cerc trecând prin A și B întâlnește din nou laturile neparalele AD și BC respectiv în M și N. Să se arate că:

1°. Patrulaterul DMNC este inscriptibil.

2°. Triunghiurile AND și BMC sunt asemenea.

N. B.

VI. 101. Bisectoarea AA' şi înălţimea BB' din triunghiul ABC se întâlnesc în M. Să se demonstreze că dacă triunghiul ABC este dreptunghic, patrulaterul CA'MB' este inscriptibil şi reciproc.

GH. B.

VI. 102. Se dă diametrul fix AB în cercul O şi fie M un punct mobil pe un cerc fix O_1 care trece prin A şi B. Dreapta BM întâlneşte a doua oară cercul O în N. Fie M' simetricul lui M faţă de N şi C intersecţia lui AN cu perpendiculara scoborîtă din M pe AB. Să se demonstreze că patrulaterul AM'CB este inscriptibil într'un cerc fix şi egal cu cercul O_1 oricare ar fi poziţia lui M.

GH. B.

Clasa VII-a. *Exerc. 77.* Suma patratelor a trei numere în progresie aritmetică este 179, iar suma bipatratelor este 17123. Să se afle acele numere.

C. I. B.

VII. 78. Dacă

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin(a+c)} = \frac{\cos b}{\cos c},$$

atunci există şi relaţia:

$$\frac{\sin(a-b)}{\sin(a-c)} = \frac{\cos b}{\cos c}.$$

N. B.

VII. 79. Să se transforme în expresie calculabilă prin logaritmi

$$E = \sin a + \sin(a-2b) + \sin 2(a-b).$$

C. I. B.

VII. 80. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x + \sin(x - 30^0) = \sin(30^0 - 2x).$$

C. I. B.

VII. 81. A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu oarecare, S aria triunghiului, iar R raza cercului circumscris, să se stabilească identitatea :

$$[\cos A + \cos(B - C)][\cos B + \cos(C - A)][\cos C + \cos(A - B)] = \frac{2S^2}{R^4}$$

C. I. B.

VII. 82. A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu oarecare, iar r şi R razele cercurilor înscris şi circumscris, să se stabilească identitatea :

$$\frac{1}{\cos A + \cos(B - C)} + \frac{1}{\cos B + \cos(C - A)} + \frac{1}{\cos C + \cos(A - B)} = \frac{R}{r}.$$

C. I. B.

VII. 83. Să se stabilească egalitatea :

$$4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \left(\frac{\sin A}{r_a} + \frac{\sin B}{r_b} + \frac{\sin C}{r_c}\right) = \frac{p}{Rr}$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu — a, b, c laturile, p semiperimetrul, R şi r razele cercurilor circumscris şi înscris, iar r_a , r_b , r_c razele cercurilor exînscrise.

C. I. B.

VII. 84. Să se rezolve un triunghiu oarecare, cunoscând un unghiu A, produsul p al laturilor ce cuprind acest unghiu şi raza R a cercului circumscris.

Discuţie.

C. I. B.

VII. 85. Un trunchiu de con este circumscris unei sfere.

1°. Să se arate că raportul suprafeţelor acestor corpuri este egal cu raportul volumelor lor. (Pentru trunchiul de con se va socoti suprafaţa totală).

2°. Intre ce limite poate varia acest raport ?

G. D. S.

VII. 86. Intr'o sferă se înscrie un cilindru aşa fel ca suprafaţa bazelor să fie egală cu suprafaţa zonei sferice cuprinsă între cele două baze. Se cere raza bazei şi înălţimea cilindrului.

G. D. S.

Clasa VIII-a. *Exerc 1.* 5 persoane se hotărăsc să joace table. Cum au o singură cutie, hotărăsc să joace pe rând (jocul cere numai doi jucători), o persoană urmând să joace o singură partidă cu fiecare din celelalte patru.

Câte partide s'au jucat în total?

N. B.

VIII. 2. Un joc de table obişnuit poartă numele de linie. Un joc care îndeplineşte anume condiţiuni se numeşte marţ şi valorează două linii. O partidă de table este câştigată de jucătorul care a câştigat mai întâi 3 linii (sau un marţ şi o linie).

Care este numărul cel mai mare şi cel mai mic de jocuri pe care-l pot face jucătorii din problema precedentă?

N. B.

VIII. 3. Intre cei 5 jucători ai problemelor precedente se află 2 jucători buni, cari joacă în medie o linie în 7 minute, un jucător mijlociu, care termină un joc în 10 minute şi 2 începători care folosesc 13 minute pentru un joc. Doi jucători de talie inegală joacă împreună în timpul necesar celui mai slab.

Se întreabă care este în mediu timpul maxim şi timpul minim în care se pot termina partidele jucate din cele două probleme precedente?

N. B.

VIII. 4. Se dă polinomul:

$$P(x) = (n-1)\,x^{n+1} - (n+1)\,x^n + (n+1)\,x - n + 1.$$

1°. Să se arate că acest polinom se împarte cu $(x-1)^3$ şi să se afle câtul.

2°. Să se găsească:

$$\lim_{x \to 1} \frac{P(x)}{(x-1)^3}.$$

G. D. S.

VIII. 5. Să se determine coeficienții A, B, C astfel ca polinomul:

$$P(x) = (x+1)^5 + A(x+1)^3 + Bx + C.$$

să se dividă cu $(x-1)^3$.

Să se afle câtul.

N. B.

VIII. 6. Să se calculeze determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & b & c & d \\ 1 & 1 & c & d \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}.$$

C. I. B.

VIII. 7. Să se stabilească egalitatea:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{(1+\sin^2 a)^2}{1-\sin^2 a \operatorname{tg}^2 a} & \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{cotg}^2 a & \cos^2 a \\ \sin^2 a & \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{cotg}^2 a & \cos^2 a \\ \sin^2 a & \sin^2 a & \operatorname{cotg}^2 a & \cos^2 a \\ \sin^2 a & \sin^2 a & \sin^2 a & \cos^2 a \end{vmatrix} = \sin^2 a$$

pentru $a \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

C. I. B.

VIII. 8. Să se calculeze limita expresiunii:

$$E = \frac{\sqrt{x^2+3x+6} - \sqrt{x^3+8}}{\sqrt{5x+6} - \sqrt{x^2+5x+2}}$$

când $x \to 2$.

C. I. B.

VIII. 9. Să se calculeze limita expresiunii:

$$E = \left[\cos (x^2 - 2ax + a^2 - b^2)\right]^{\frac{1}{x^2 - ax - ab - b^2}}$$

pentru $x \to (a + b)$.

C. I. B.

VIII. 10. Să se verifice relația lui EULER pentru funcțiunea:

$$f(x, y, z) = (x + y)\, e^{\frac{x}{y}} + (y + z)\, e^{\frac{y}{z}} + (z + x)\, e^{\frac{z}{x}}.$$

G. D. S.

INSTRUCȚIUNI

Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului, se vor construi îngrijit, cu cerneală sau tuș, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceiași foae.

Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvatorului în ordinea următoare:

Nume de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțite de clasa și școala pe care o urmează.

Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află.

Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului) numai dela abonații «Suplimentului cu Exerciții» al *Gazetei Matematice,* pe adresa **Lt.-Comandor Gr. Zapan,** *Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158. București 2.*

Drepturile de reproducere rezervate Societății „Gazeta Matematică"

Nr. 2 –

BIBLIOTECA CENTRALĂ
a „ASOCIAȚIUNII”
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL II. No. 2 — 1 NOEMVRIE 1935

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE" DIN 1936

Adunarea generală a Societăţii „*Gazeta Matematică*" a hotărît, în şedinţa dela 22 August a. c., ţinerea unui concurs de matematici în cursul anului 1936 între elevii liceelor, civile şi militare, din ţară şi între elevii anului preparator al Şcoalei Politehnice «Regele Carol II».

Concursul va avea loc după Paşte, înainte de reînceperea cursurilor, în Bucureşti, unde se va da examen înscris şi oral, dacă Societatea va dispune de mijloace de a aduce candidaţii; dacă vor lipsi aceste mijloace, concursul se va ţine într'o Duminecă din luna Mai, în diferite centre din ţară, dându-se numai teze.

Deciziunea în această privinţă se va publica în numărul din Februarie 1936.

Fiecare candidat este obligat să se înscrie *la două din materiile clasei sale,* urmând a da, la fiecare, teză, iar în cazul ţinerii concursului în Bucureşti, şi oral.

Pentru unitatea pregătirii, se va publica în numărul din Octomvrie al *Gazetei Matematice* un program, conţinând materia pe care candidatul unei anume clase va trebui să pregătească pentru obiectul la care e înscris.

Sub niciun motiv candidatul nu va fi scuzat de nepregătirea unor capitole trecute în programul clasei sale, pentru obiectul ales.

Cererile de înscriere se vor trimite direct de candidaţi Societăţii „Gazeta Matematică", Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2, în plicuri recomandate până cel mai târziu la 31 Decemvrie 1935.

Nu se primesc cereri trimise de părinți, corespondenți, profesori sau școli.

Cererile vor arăta neapărat, numerotate și în ordinea arătată aci, următoarele date :

1. Numele și pronumele, scrise clar.

2. Clasa sau anul pregătitor în care urmează candidatul. Pentru cei pregătiți în particular se va arăta școala la care a urmat anul precedent sau în care a depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă.

3. Adresa în timpul școalei și în timpul vacanței Paștilor, pentru a se putea face comunicările și înștiințările necesare.

4. Dacă dispune de mijloace de a veni în București, dacă are unde fi găzduit și întreținut aci în timpul concursului sau dacă unul din aceste mijloace ar urma să fie procurat de Societatea „*Gazeta Matematică*".

Dacă are nevoie de bani pentru drum, va indica și gara de unde va lua trenul pentru a veni la București și gara la care se întoarce după concurs.

5. Cele două materii la care se înscrie.

6. Activitatea sa la *Gazeta Matematică* sau la alte reviste din țară și străinătate.

Candidații înscriși la concurs, dacă din diferite motive nu se mai pot prezenta, sunt obligați să anunțe din timp.

Părăsirea sălilor de concurs înscris este interzisă înainte de predarea tezelor.

Se atrage atențiunea că toate condițiunile, pentru înscriere și ținerea concursului, trebuesc respectate cu toată exactitatea inerentă științelor matematice.

In numărul 6 din Februarie 1936 al *Gazetei Matematice* se se va publica modul de ținere al concursului, localitatea, orele de prezentare și numele candidaților admiși la concurs.

Numărul celor admiși va depinde de sacrificiile materiale ce se vor cere Societății „*Gazeta Matematică*", pentru transportul, găzduirea și întreținerea candidaților și de pregătirea pe care aceștia vor arăta-o în cererile ce vor face.

Candidații reușiți la concurs vor primi ulterior diplome, recompense, premii sau mențiuni. Primul care va reuși la concurs, dintre elevii anului preparator de pe lângă Școala Politehnică «Regele

Carol II» din Bucureşti, va primi premiul «ANGHEL SALIGNY» (de 1000 lei) oferit de un membru al Societăţii noastre, iar primul reuşit dintre toţi candidaţii va primi premiul «LT-COL. G. TĂNĂSESCU» în cărţi, în conformitate cu înştiinţarea făcută în acest număr la articolul: *Premii şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice“.*

Comisiunea examinatoare se va compune din membrii Societăţii *„Gazeta Matematică“*, cari nu vor avea rude printre candidaţii admişi la concurs.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa IV-a. *Exerc. 74. Intr'un război s'a întrebuinţat următorul alfabet cifrat. S'a făcut să corespundă literelor alfabetului:* a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z *numerele dela 1 la 26.*

S'a ataşat apoi fiecărui număr X *un altul* Y, *astfel că.*

$$Y = \frac{5X + 2}{6}$$

şi s'a reprezentat cu acest număr Y *litera căreia îi corespundea numărul* X. *Să se descifreze cuvintele:*

$$\left|\begin{matrix}37\\6\end{matrix}\ \begin{matrix}7\\6\end{matrix}\ 22\ \begin{matrix}9\\2\end{matrix}\ \begin{matrix}51\\3\end{matrix}\ \begin{matrix}14\\12\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}67\\6\end{matrix}\ \begin{matrix}21\\18\end{matrix}\ \begin{matrix}102\\6\end{matrix}\ \begin{matrix}18\\4\end{matrix}\ \begin{matrix}134\\12\end{matrix}\ \begin{matrix}35\\30\end{matrix}\ \begin{matrix}153\\9\end{matrix}\ \begin{matrix}47\\6\end{matrix}\ \begin{matrix}17\\6\end{matrix}\ \begin{matrix}49\\42\end{matrix}\right|$$

$$\begin{matrix}77\\66\end{matrix}\left|\begin{matrix}235\\30\end{matrix}\ \begin{matrix}201\\18\end{matrix}\ \begin{matrix}41\\3\end{matrix}\ \begin{matrix}31\\3\end{matrix}\ \begin{matrix}94\\12\end{matrix}\right.\ 12\ \left|\begin{matrix}141\\18\end{matrix}\ \begin{matrix}255\\15\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}82\\6\end{matrix}\ \begin{matrix}91\\78\end{matrix}\ \begin{matrix}357\\21\end{matrix}\ \begin{matrix}46\\3\end{matrix}\ \begin{matrix}107\\6\end{matrix}\ \begin{matrix}44\\2\end{matrix}\ \begin{matrix}27\\6\end{matrix}\ \begin{matrix}34\\12\end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix}329\\42\end{matrix}\left|\begin{matrix}11\\3\end{matrix}\ \begin{matrix}45\\10\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}119\\102\end{matrix}\ \begin{matrix}24\\2\end{matrix}\ \begin{matrix}517\\66\end{matrix}\right|.$$

N. B.

Prin enunţ ni se dă corespondenţa (*a*, 1), (*b*, 2), (*c*, 3), (*d*, 4), (*e*, 5), (*f*, 6), (*g*, 7), (*h*, 8), (*i*, 9), (*j*, 10), (*k*, 11), (*l*, 12), (*m*, 13), (*n*, 14), (*o*, 15), *p*, 16), (*q*, 17), (*r*, 18), (*s*, 19), (*t*, 20), (*u*, 21), (*v*, 22), (*w*, 23), (*x*, 24), (*y*, 25), (*z*, 26).

Să luăm de exemplu fracțiunea $\frac{37}{6}$ și să vedem litera pe care o reprezintă.

In acest caz $Y = \frac{37}{6}$ și vom avea de rezolvat ecuația:

$$\frac{5X+2}{6} = \frac{37}{6}.$$

Deci $X = 7$, număr ce corespunde literei *g*.
Rezolvind toate ecuațiile analoage, vom găsi:
„Gazeta Matematică a împlinit patruzeci de ani".

Clasa V-a. *Exerc. 71. Se dă dreapta* Δ *care trece prin vârful* O *al unghiului drept* xOy. *Să se demonstreze că simetricele lui* Δ *față de laturile unghiului se suprapun, și reciproc, dacă simetricile dreptei* Δ *ce trec prin* O, *față de* Ox *și* Oy *se suprapun, atunci unghiul* xOy *este drept.*

GH. B.

Fie Δ′ simetrica lui Δ față de Ox. Unghiul (Δ, Ox) fiind, din cauza simetriei egal cu unghiul (Ox, Δ') urmează că unghiul (Δ, Oy) este egal cu unghiul (Δ', Oy) ceeace înseamnă că Δ′ e simetrica lui Δ față lui Oy.

Dacă, reciproc Δ se suprapune cu Δ′, înseamnă că unghiurile (Δ, Ox), (Ox, Δ') sunt egale și (Δ, Oy'), (Δ', Oy) sunt de asemeni egale, Oy' fiind prelungirea lui Oy. Din această egalitate de unghiuri urmează că unghiurile (Ox, Oy), (Ox, Oy') sunt egale, ceeace demonstrează reciproca.

V. 72. Se dă triunghiul ABC *și se cere ca printr'un punct* P *al laturei* BC *să se ducă o dreaptă care să taie pe* AB *și* AC *în* M *și* N *astfel încât patrulaterul* CNBM *să fie inscriptibil.*

GH. B.

Exercițiul comportă examinarea mai multor cazuri de figură.
I. P *se află pe prelungirea lui* CB.

1°. N *şi* M *sunt pe prelungirile* CA, BA. Pe o figură se vede că trebue ca

$$\sphericalangle PNB = \sphericalangle C.$$

Deci N este la intersecţia lui BA cu segmentul capabil de unghiul C descris pe PB.

2°. N *şi* M *sunt între* A *şi* C *şi* B. Unghiul PMB trebue să fie egal cu C.

3°. N *şi* M *se află pe prelungirile* AB, AC. In acest caz

$$\sphericalangle PNC = \sphericalangle B.$$

Se examinează la fel cazurile când P este între B şi C sau pe prelungirea lui BC.

Pentru posibilităţi în diferitele cazuri, exerciţiul cere o discuţie pe care o vom da în *Gazeta Matematică.*

V. 75. Să se calculeze rădăcinile ecuaţiei:

$$m(m-2)x^2 + 4(m^2 - n)x + 4n(2m - n) = 0.$$

G. D. S.

Rădăcinile sunt:

$$x = \frac{-2(m^2 - n) \pm 2\sqrt{(m^2 + n - mn)^2}}{m(m-2)}.$$

$$x_1 = -\frac{2n}{m}\ ;\ x_2 = \frac{2(n-2m)}{m-2}.$$

V. 81. Un triunghiu ABC *are* $\overline{AB} = 2$, *unghiul* A *de* 75° *şi unghiul* B *de* 60°.

Să se calculeze lungimea înălţimilor $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$.

C. I. B.

Fie AA' înălţimea vârfului A. Cercul ABA' are centrul la mijlocul lui $\overline{AB}$, întrucât $\sphericalangle AA'B = 90°$. $\overline{BA'}$ şi $\overline{AA'}$ sunt respectiv latura exagonului regulat şi a triunghiului echilateral înscrise în cerc.

$$\overline{BA'} = 1\ ,\ \overline{AA'} = \sqrt{3}.$$

Deoarece:

$$\sphericalangle BAA' = 30^0, \sphericalangle CAA' = 45^0 \text{ și } \sphericalangle ACA' = 45^0.$$

Deci:

$$\overline{A'C} = \overline{AA'} = \sqrt{3} \quad , \quad \overline{BC} = 1 + \sqrt{3}.$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{A'C}^2 = \overline{AA'}^2} = \sqrt{6}.$$

Dar:

$$\overline{BC} \times \overline{AA'} = \overline{AC} \times \overline{BB'} = 2 \text{ aria } ABC$$

$$\overline{BB'} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AA'}}{\overline{AC}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Analog se obține $\overline{CC'} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$.

V. 82. Să se determine a *pentru care ecuațiunea:*

$$ax^2 - (a+1)\,x + (a+2) = 0$$

are:

1. *rădăcini reale;*
2. *o rădăcină egală cu* a.

C. I. B.

1. $$(a+1)^2 - 4a\,(a+2) \geqslant 0$$

$$-3\,a^2 - 6a + 1 \geqslant 0,$$

a trebue să fie cuprins între rădăcinile trinomului $(-3a^2 - 6a + 1)$ sau egal cu ele.

$$-\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \leqslant a \leqslant -1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

2. Va trebui ca $x = a$ să verifice ecuațiunea propusă

deci

$$a^3 - a^2 + 2 = 0$$

sau

$$(a+1)\,(a^2 - 2a + 2) = 0$$

de unde

$$a_1 = -1 \quad , \quad a_{2,3} = 1 \pm i.$$

V. 83. Fie BB′ *înălțimea triunghiului* ABC *dreptunghic în* B *și* P *un punct mobil pe cercul* BB′A.

Paralela din B *la* AP *taie acest cerc în* P′, *iar dreapta* BP *taie cercul* BB′C *în* Q. *Acest cerc este întâlnit de* BP′ *în* Q. *Se cere locul geometric al centrelor de greutate al triunghiurilor* QPP′ *și* QPQ′ *când* P *se mișcă pe cercul* AB′B.

GH. B.

In cercul BB′A arcele BP, AP′ sunt egale, fiind cuprinse între corzi paralele și cum AB e diametru, unghiurile din P și P′ sunt drepte. Dar atunci trapezul isoscel BPAP′ este dreptunghiu și deci mijlocul diagonalei PP′ este în mijlocul C′ al lui BA. Centrul de greutate al triunghiului QPP′ va descrie deci un cerc omotetic cu cercul BB′C, raportul de omotetie fiind

$$\frac{QC'}{GC'} = 3$$

G fiind centrul de greutate pe mediana QC′, iar C′ centrul de omotetie.

La fel figura BQCQ′ este un dreptunghiu cu centrul în mijlocul A′ al lui BC. Locul centrului de greutate G′ al triunghiului QPQ′ este un cerc omotetic lui BB′A, centrul de omotetie fiind A′.

V. 89. Să se rezolve sistemul:

$$(b-c)(b-1)(c-1)x+(c-a)(c-1)(a-1)y+(a-b)(a-1)(b-1)z$$
$$=c(a-b)(b-1)(x-1)+a(b-c)(c-1)(y-1)+b(c-a)(a-1)(z-1)$$
$$=b(c-a)(c-1)(x-1)+c(a-b)(a-1)(y-1)+a(b-c)(b-1)(z-1)$$
$$=(a-b)(b-c)c-a).$$

N. B.

$$x=a \quad , \quad y=b \quad , \quad z=c.$$

Clasa VI-a. *Exerc. 81. Să se rezolve ecuațiile.*

a) $\sin 2x+\cos 2x=\sin x+\cos x-1$

b) $1+\sin x+\cos 2x=\sin^2 x.$

G. D. S.

a) $\sin 2x+1+\cos 2x-(\sin x+\cos x)=2\sin x\cos x$
$+2\cos^2 x-(\sin x+\cos x)=(\sin x+\cos x)(2\cos x-1)=0.$

Deci:

$$\sin x + \cos x = 0 \quad \text{care dă:} \quad x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

şi:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{care dă:} \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

b) $$1 + \sin x + 1 - 2\sin^2 x = \sin^2 x$$

$$\therefore\ 3\sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \quad \therefore \quad \sin x = 1 \text{ şi } \sin x = -\frac{2}{3}.$$

Prima ecuaţie dă:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}; \text{ a doua: } x = 2k\pi - 41^\circ 48' 38''$$

şi

$$x = (2k+1)\pi + 41^\circ 48' 38''.$$

VI. 84. Notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu, să se verifice identitatea:

$$\frac{a^2 + 2bc\ \cos A}{b^2 + 2ac\ \cos B} = \frac{1 + \cos\ (B - C)\ \cos A}{1 + \cos\ (A - C)\ \cos B}.$$

C. I. B.

Din relaţia cunoscută

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A,$$

se deduce

$$a^2 + 2bc\ \cos A = b^2 + c^2 = 4R^2\ (\sin^2 B + \sin^2 C)$$

pentrucă

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Dar din

$$\sin x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}},$$

urmează

$$\sin^2 B = \frac{1 - \cos 2B}{2}, \quad \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2C}{2}.$$

Deci

$$a^2+2bc\cos A=2R^2(2-\cos 2B-\cos 2C)=4R^2[1-\cos(B+C)\cos(B-C)]$$
$$=4R^2[1+\cos(B-C)\cos A].$$

Analog se obține

$$b^2+2ac\cos B=4R^2[1+\cos(A-C)\cos B].$$

VI. 85. Să se facă următoarea expresiune:

$$E=1+\operatorname{tg}35^0+\operatorname{tg}40^0$$

calculabilă prin logaritmi.

C. I. B.

$$E=1+\frac{\sin 75^0}{\cos 35^0\ \cos 40^0}=1+\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin(\varphi+45^0)}{\cos\varphi\ \cos 45^0}=\frac{\sqrt{2}\sin(\varphi+45^0)}{\cos\varphi}.$$

VI. 90. Să se verifice identitatea

$$\frac{3+\cos 4a-4\cos 2a}{3+\cos 4a+4\cos 2a}=\operatorname{tg}^4 a.$$

C. I. B.

Notând E membrul I al identității, deoarece

$$\cos 4a=2\cos^2 2a-1,$$

$$E=\frac{\cos^2 2a-2\cos 2a+1}{\cos^2 2a+2\cos 2a+1}=\left(\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}\right)^2=\operatorname{tg}^4 a.$$

Exercițiul este un caz particular al problemei 4328 rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XL, pag. 137.

In acea problemă α, β, γ fiind arce oarecari, se dovedește relația

$$\frac{1+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma-4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma}{1+\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma+4\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma}$$
$$=\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)\operatorname{tg}(\alpha-\beta-\gamma)\operatorname{tg}(\beta-\gamma-\alpha)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha-\beta).$$

Dacă în acestă egalitate facem:

$$\alpha = a \ , \ \beta = 0 \ , \ \gamma = 0,$$

obținem tocmai identitatea prezentului exercițiu.

VI. 92). Laturile și unghiurile unui triunghiu* ABC *fiind notate în mod obișnuit, să se stabilească relația*

$$a^2 + h_a^2 - m_a^2 = 4b \cos C (b \cos C - a) + 5bc \cos B \cos C + \frac{3a^2}{4} \cdot$$

C. I. B.

Notând A_1, A_2 picioarele înălțimii și medianei vârfului A,

$$m_a^2 - h_a^2 = \overline{A_1A_2}^2$$

$$a^2 + h_a^2 - m_a^2 = a^2 - \overline{A_1A_2}^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \overline{A_1A_2}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \overline{A_1A_2}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{2} + b \cos C\right)\left(\frac{a}{2} + c \cos B\right) = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}\left(b \cos C + c \cos B\right) \cdot$$

$$+ bc \cos B \cos C = \frac{3a^2}{4} + bc \cos B \cos C$$

$$= \frac{3a^2}{4} + 5bc \cos B \cos C - 4bc \cos B \cos C$$

$$= \frac{3a^2}{4} + 5bc \cos B \cos C + 4b \cos C (b \cos C - a).$$

Clasa VII-a. *Exerc. 61. Să se găsească valoarea expresiei*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{e^x} - 1} \cdot$$

G. D. S.

Se obține $\frac{0}{0}$. Aplicăm regula lui HÔPITAL:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{e^x} - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-e^{-x}}{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}} = \lim \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \times \lim \frac{x^2}{e^x} = \lim \frac{2x}{e^x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

---

*) Enunț complet.

VII. 64. Se dau în epură punctele A (4, 0, 0); B (2, 0, 4); C (3, 1, 4). *Să se afle distanța punctului* A *la dreapta* BC.

C. I. B.

Deoarece B, C au aceeași cotă, dreapta BC este orizontală. De aceea proiecția orizontală a perpendicularei, dusă din A pe BC, este în epură o perpendiculară coborîtă din *a* pe *bc*.

Ori, cum în triunghiul isoscel *abc*, $\frac{1}{2}\overline{ab}$ este egal cu înălțimea vârfului *c*, triunghiul este și dreptunghiu. Deci C este piciorul perpendicularei dusă din A pe BC.

Triunghiul CcA fiind dreptunghiu în *c*, iar $\overline{Cc}$ fiind cota punctului C,

$$\overline{AC}^2 = \overline{Cc}^2 + \overline{ac}^2 = 16 + 2 = 18$$

$$\overline{AC} = 3\sqrt{2}.$$

VII. 65. Să se demonstrexe că triunghiul ABC, *pentru care în epură* A (2, 1, 3); B (3, 2, 3); C (4, 2, 2), *este isoscel.*

C. I. B.

Latura AB fiind situată pe o orizontală, adevărata ei mărime este $\overline{ab}$.

La fel, latura BC e situată pe o frontală, deci $\overline{b'c'}$ reprezintă adevărata ei mărime.

Dar $\overline{ab} = \overline{b'c'} = \sqrt{2}$.

Deci $\overline{AB} = \overline{BC}$.

VII. 66. Se dau în epură punctele A (2, 0, 3), B (3, 1, 3), *și* C (4, 2, 0). *Să se arate că punctele* A, B *și verticala trecând prin* C *sunt în același plan.*

C. I. B.

AB este orizontală. O verticală și o orizontală sunt în același plan, dacă proiecția orizontală a orizontalei trece prin punctul ce reprezintă proiecția orizontală a verticalei. E cazul prezentului exercițiu.

VII. 68. Să se demonstreze că punctele A (2, 1, 3), B (3, 2, 3), C (1, 4, 3), D (5, 4, 0) *ale unei epure, nu sunt în acelaşi plan.*

C. I. B.

Punctele A, B, C se află într'un plan orizontal. D nu-i aparţine.

VII. 69. Să se demonstreze că punctele unei epure A (2, 1, 3), B (4, 3, 3), C (3, 3, 2), D (5, 5, 2) *sunt în acelaşi plan.*

C. I. B.

AB şi CD sunt orizontale, iar *abcd* formează un paralelogram. Deci AB şi CD. sunt paralele.

VII. 70. Să se demonstreze că punctele A (2, 1, 3), B (3, 2, 3), C (4, 3, 3), D (5, 3, 0) *ale unei epure sunt în acelaşi plan.*

C. I. B.

Punctele A, B, C sunt colineare întrucât au aceeaşi cotă, iar proiecţiile lor orizontale sunt conlineare.

Dreapta ABC şi punctul D determină un plan.

VII. 71. Să se demonstreze că linia poligonală ABCDE, *pentru care în epură* A (2, 1, 3); B (3, 2, 3); C (4, 2, 2); D (5, 1, 2); E (6, 1, 3) *este formată din segmente egale.*

C. I. B.

Segmentele AB, CD se află pe orizontale, deci mărimile lor sunt

$$\overline{ab} = \overline{cd} = \sqrt{2}.$$

Segmentele BC, DE sunt situate pe frontale; mărimile lor sunt

$$\overline{b'c'} = \overline{d'e'} = \sqrt{2}.$$

VII. 75. Să se arate că numerele:

940901940001 , 960401960001 ,

9940090199400001 , 9960040199600001 ,

sunt pătrate perfecte.

N. B.

$940901940001 = (10-1).10^{11}+4.10^{10}+9.10^{8}+10^{6}+(10-1).10^{5}+4.10^{4}+1 = 10^{12}-6.10^{10}+9.10^{8}+2.10^{6}-6.10^{4}+1 = (10^{6}-3.10^{4}+1)^{2}+970001^{2}.$

$960401960001 = (10-1).10^{11}+6.10^{10}+4.10^{8}+10^{6}+(10-1).10^{5}+6.10^{4}+1 = 10^{12}-4.10^{10}+4.10^{8}+2.10^{6}-4.10^{4}+1 = (10^{6}-2.10^{4}+1)^{2} = 980001^{2}.$

$9940090199400001 = (10^{2}-1).10^{14}+4.10^{13}+9.10^{10}+10^{8}+(10^{2}-1).10^{6}+4.10^{5}+1 = 10^{16}-6.10^{13}+9.10^{10}+2.10^{8}-6.10^{5}+1 = (10^{8}-3.10^{5}+1)^{2} = 99700001^{2}.$

$9960040199600001 = (10^{2}-1).10^{14}+6.10^{13}+4.10^{10}+10^{8}+(10^{2}-1).10^{6}+6.10^{5}+1 = 10^{16}-4.10^{13}+4.10^{10}+2.10^{8}-4.10^{5}+1 = (10^{8}-2.10^{5}+1)^{2} = 99800001^{2}.$

Până la 15 Octomvrie s'au primit soluţiuni bune pentru exerciţiile publicate în numerele 8, 9 Vol. I şi 1, Vol. II dela [1]):

Şcoala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu" Bucureşti.

Clasa V-a: NASTA A. GABRIELA AMELIA (V : 75*, 96*, 97*, 98).

Liceul de fete „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa V-a: NICHIFOR ANTOANETA (V : 75).

Liceul de fete „Dr. C. Angelescu" Buzău.

Clasa VII-a: IONESCU G. FILOFTEIA (VII : 60, 61, 63*).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Liceul de fete „Despina Doamna" Ploești.

Clasa V-a: PETRESCU MIETTA (V : 101).

Seminarul Pedagogic „Titu Maiorescu" București.

Clasa V-a: BODNĂRESCU M. H. (V : 96*, 97*).

Liceul „Matei Basarab" București.

Clasa V-a: PRECIADO I. T. (V : 75*, 96, 97).
Clasa VI-a: PRECIADO I. T. (VI : 94, 96*, 97*, 99); SAICHIM O. A. (VI : 81. VII : 60, 61*, 63*).

Liceul „G. Lazăr" București.

Clasa V-a: DROUHET ED. (V : 96*, 97*); IONESCU V. G. (V : 88, 91); MUNROE M. (V : 96).
Clasa VI-a: MUNROE M. M. (VI : 93*, 94, 95, 96, 97*, 98*, 100*. VII : 77*).

Liceul „G. Șincai" București.

Clasa VII-a: ENE F. I. (VII : 60*, 63*).

Liceul „Cantemir Vodă" București.

Clasa V-a: CAPRIEL G. I. A. (V : 96, 97*).

Liceul „Aurel Vlaicu" București.

Clasa V-a: FULGA L. T. (V : 104).

Liceul „Samuil Vulcan„ Beiuș.

Clasa VI-a: HOMPOLA I. T. (VI : 77*, 78*, 82*, 83*, 85*, 90*, 91*).

Liceul „Carol I" Craiova.

Clasa VII-a: MOISOVICI A. S. (VII : 60, VIII : 6, 8).

Liceul militar „D. A. Sturza" Craiova.

Clasa VI-a: GALAN I. (VI : 80); IVAN A. (VI : 80, 81); POPLEȘEANU I. (VI : 71, 74); RUNCEANU N. C. (VI : 80); ȘERBĂNESCU M. (VI : 80).
Clasa VII-a: COMĂNESCU A. T. (VII : 60, 62).

Liceul „C. Brediceanu" Lugoj.

Clasa V-a: SEDMIK C. N. (V : 75*).
Clasa VI-a: STAMATE I. (VI : 93*, 94, 96, 97*, 99*. VII : 77. VIII : 1).

Internatul „Gr. Iordăchescu" Ploești.

Clasa V-a: NICOLESCU S. C. (V: 101, 107).

Liceul militar „N. Filipescu" Mănăstirea Dealu.

Clasa II-a: CRĂCIUNESCU I. M. (V: 96*, 97*).
Clasa V-a: FLORESCU V. (V: 101*, 104*, 106*, 107*, 108. VI: 97*. VII: 83*. VIII: 6*, 7*, 8*); NEGULESCU D. ST. (V: 84, 87, 88).
Clasa VII-a: CERCEL C. O. (VII: 78, 79).
Clasa VIII-a: DASCĂLU I. (VIII: 1, 6, 8*, 9*).

EXERCIȚII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 88.* Să se construiască segmentul

$$MN = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5},$$

știind că unitatea de măsură este cât 2 cm.

O. N. Ț.

IV. 89. Latura unui pătrat are ca măsură: $1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$, unitatea de măsură fiind un centimetru. Să se calculeze suprafața acelui pătrat.

O. N. Ț.

VI. 90. Măsurate cu un centimetru (luat ca unitate de măsură) laturile unui dreptunghiu dau măsurile:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \quad \text{și} \quad \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Să se arate că dreptunghiul este echivalent cu unitatea de măsură pentru suprafață.

O. N. Ț.

IV. 91. In triunghiul BAC, dreptunghiu în A, ducem înălțimea $\overline{AD}$, care determină pe ipotenuza BC segmentele:

$$\overline{BD} = 2 \ , \ \overline{DC} = 3.$$

Ducem apoi în cele două triunghiuri noui formate înălțimile $\overline{DE}$ și $\overline{DF}$, iar din E și F perpendicularele $\overline{EG}$ și $\overline{FH}$ pe AD. Să se calculeze valorile rapoartelor:

$$\frac{\overline{EG}}{\overline{CD}} \quad \text{și} \quad \frac{\overline{FH}}{\overline{BD}} .$$

O. N. Ț.

IV. 92. Să se calculeze valoarea expresiunii:

$$x + (x+1)^2 + (x+2)^3 + (x+3)^4$$

pentru:

$$x = -2 \; ; \; x = -3 \; ; \; x = -1 \; ; \; x = -0{,}0001.$$

O. N. Ț.

IV. 93. Să se calculeze valoarea expresiunii:

$$E \equiv (x^2 - 1)(x^2 + 2x)(x^2 + 4x + 3)$$

pentru:

$$x = 10^7 \; ; \; x = 10^7 - 1 \; ; \; x = 10^7 - 2.$$

O. N. Ț.

IV. 94. Să se calculeze valoarea expresiunii:

$$E \equiv \frac{C \times P \times T}{100 \times 12}$$

pentru:

a) $C = 5000 \; , \; T = 6 \; , \; P = 5$

b) $C = 5000 \; , \; T = 6 \; , \; P = 4$

c) $C = 5000 \; , \; T = 6 \; , \; P = 3$

d) $C = 5000 \; , \; T = 6 \; , \; P = 1\,{}^1/_2$.

O. N. Ț.

IV. 95. Să se arate că avem egalitățile :

$$21 = (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})$$

$$91 = (4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3})(4-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3})$$

$$651 = (6-\sqrt{15})(6-\sqrt{5})(6+\sqrt{5})(6+\sqrt{15})$$

$$2451 = (8+\sqrt{21})(8+\sqrt{7})(8-\sqrt{7})(8-\sqrt{21}).$$

O. N. Ț.

IV. 96. Să se arate că produsul :

$$P \equiv (1+\sqrt{210})(\sqrt{6}-\sqrt{35})(5\sqrt{35}-34\sqrt{6})$$

este un număr întreg.

O. N. Ț.

IV. 97. Să se găsească valoarea exactă a produsului :

$$P = (1+\sqrt{231})(\sqrt{11}-\sqrt{21})(\sqrt{21}-2\sqrt{11}).$$

O. N. Ț.

Clasa V-a. *Exerc. 110.* Să se afle valoarea expresiunii :

$$E \equiv \frac{[x^2-(a+1)x+a]\ [x^2-(a-2)x-2a]}{[x^2-(a+2)x+2a]\ [x^2-(a-1)x-a]}$$

pentru $x = a$.

C. I. B.

V. 111. Să se verifice identitatea

$$\frac{a}{(a+b-c)(a+c-b)} + \frac{b}{(b+a-c)(b+c-a)} - \frac{c}{(c+a-b)(c+b-a)} \equiv \frac{1}{a+b-c}.$$

N. B.

V. 112. Să se rezolve ecuația:

$$(a+1)(b-1)(x+a)+(a-1)(b+1)(x-a)$$
$$=(a+1)(b+1)(x-a)+(a-1)(b-1)(x+a).$$

N. B.

V. 113. Se dau polinoamele:

$$P_1 \equiv x+a;\ P_2 \equiv x^2+ax+a^2;\ P_3 \equiv x^3+ax^2+a^2x+a^3$$
$$P_4 \equiv x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4.$$

Să se arate că există relația:

$$2(P_4-P_2^2)+P_1\,.\,(P_1^3-P_3)\equiv 0.$$

C. I. B.

V. 114. Să se verifice indentitatea:

$$(a+b)^4+b(a+b)^3+b^2(a+b)^2+b^3(a+b)+b^4$$
$$\equiv a^4+5b(a+b)(a^2+ab+b^2).$$

C. I. B.

V. 115. Să se calculeze:

$$\frac{\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{a+b-c}}{1-\frac{b+c-a}{a+b+c}}+\frac{\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}}{1-\frac{a-b+c}{a+b+c}}+\frac{\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a-b+c}}{1-\frac{a+b-c}{a+b+c}}.$$

C. I. B.

V. 116. Fie ABCD un trapez dreptunghiu în care AB e perpendiculară pe baze și fie I punctul de întâlnire al diagonalelor AC, BD.

Dacă diagonalele sunt perpendiculare, să se arate că există relațiile

$$\overline{AI}\,.\,\overline{BI}=\overline{CI}\,.\,\overline{DI}\ ;\ \frac{\overline{AI}^3}{\overline{BI}^3}=\frac{\overline{DI}}{\overline{CI}}.$$

C. I. B.

V. 117. ABCD fiind un trapez dreptunghiu în care diagonalele AC, BD sunt perpendiculare; distanța între baze este a și b lungimea bazei mari BC. Să se calculeze depărtarea punctului de întâlnire al diagonalelor de fiecare vârf.

C. I. B.

V. 118. Să se calculeze valoarea expresiunii:

$$E \equiv 1 + x^2 + (1 + x^2)^2 + (1 + x^2)^4$$

pentru $x = n + \frac{1}{n}$.

O. N. Ț.

V. 119. Să se calculeze valoarea expresiunii.

$$E \equiv [x^2 + 2] + [(x^2 + 2)^2 + 2] + [[(x^2 + 2)^2 + 2] + 2]$$

pentru $x = n - \frac{1}{n}$.

O. N. Ț.

Clasa VI-a. *Exerc. 103.* Raportul înălțimilor unui triunghiu isoscel este r, perimetrul său fiind p. Să se calculeze laturile și înălțimile.

C. I. B.

VI. 104. Fie D, punctul diametral opus vârfului A al triunghiului echilateral ABC, pe cercul circumscris, iar E mijlocul laturii $\overline{AB}$. Să se arate, că

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

C. I. B.

VI. 105. Pot exista patru numere în progresie aritmetică a, b, c, d astfel ca:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}?$$

C. I. B.

VI. 106. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$(x^2 - a^2)(x+b) + (x^2 - b^2)(x+c) + (x^2 - c^2)(x+a)$$
$$= (x^2 + a^2)(x+c) + (x^2 + b^2)(x+a) + (x^2 + c^2)(x+b).$$

C. I. B.

VI. 107. Dacă $ab = cd$, atunci avem:

$$\sqrt{a^2 + d^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2} = (a - b)(c - d).$$

G. D. S.

VI. 108. Intr'o sferă se face o secţiune plană, astfel ca suprafaţa cercului de secţiune să fie $\frac{1}{4}$ din suprafaţa calotei sferice determinată de planul de secţiune. Se cere raza cercului de secţiune şi distanţa lui la centrul sferei.

G. D. S.

VI. 109. Există trei numere de forma:

$$(ax+b);\ (ax+b)^2;\ (ax+b)^4$$

care să fie în progresie aritmetică?

O. N. Ţ.

VI. 110. Există numere de forma:

$$x\ ;\ x+r\ ;\ x+2r$$

care să fie în progresie geometrică?

O. N. Ţ.

VI. 111. Să se găsească trei numere în progresiune aritmetică astfel ca:

a) suma lor să fie 360.

b) Scăzând jumătatea termenului de mijloc din ceilalţi doi termeni să obţinem două resturi astfel ca unul să fie jumătatea celuilalt.

O. N. Ţ.

VI. 112. Ştiind că a, b, c sunt trei numere în progresie aritmetică să se determine x, astfel ca numerele:

$$(x^2 + ax + b)\ ;\ (x^2 + bx + c)\ ;\ (x^2 + cx + a)$$

să fie în progresie geometrică.

O. N. Ţ.

Clasa VII-a. *Exerc. 87.* Între elementele unui triunghiu, avem relaţia :

$$\frac{b}{c} = \frac{c - 2a\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right)}{b - 2a\cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

N. B.

VII. 88. Să se demonstreze relaţia

$$\frac{b}{c} = \frac{c\cos\alpha - a\cos(B + \alpha)}{b\cos\alpha - a\cos(C + \alpha)}$$

a, b, c fiind laturile unui triunghiu ABC, iar α un unghiu oarecare.

N. B.

VII. 89. Dacă $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, avem relaţia :

$$\cos^3\alpha \sin\beta \sin\gamma + \cos^3\beta \sin\gamma \sin\alpha +$$
$$\cos^3\gamma \sin\alpha \sin\beta = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)$$

N. B.

VII. 90. Dacă avem relaţia :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + b\right)} = \frac{\cos a}{\sqrt{3}\cos b},$$

atunci avem şi relaţia :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - b\right)} = \frac{\sqrt{3}\cos a}{\cos b}.$$

N. B.

VII. 91. Dacă avem:

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin(c+d)} = \frac{\cos a \cdot \cos b}{\cos c \cdot \cos d}$$

atunci există şi relaţiunea:

$$\frac{\sin(a-c)}{\sin(d-b)} = \frac{\cos a \cos c}{\cos b \cos d}.$$

N. B.

VII. 92. Cei *douăzeci* elevi ai unei clase hotărăsc să formeze o echipă de foot-baal. Şapte din elevi nu voesc să fie decât portari, ceilalţi admiţând să aibă orice rol în formaţie. In câte moduri se poate forma echipa de 11 jucători?

N. B.

VII. 93. In câte moduri se pot aşeza cele 32 piese ale unui joc de şah pe cele 64 pătrate ale tablei de joc?

N. B.

VII. 94. Să se determine domeniile de existenţă în plan ale funcţiunii:

$$y = \sqrt{\frac{(x^2-4)(x^2-9)}{x^4+13x^2+36}}.$$

O. N. Ţ.

VII. 95. Să se determine domeniile de existenţă ale funcţiunii:

$$y = \sqrt{\frac{x^4-16}{x^6-1}}.$$

O. N. Ţ.

VII. 96. Să se determine domeniile de existenţă ale funcţiunii:

$$y = \sqrt{\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x}}.$$

Ce particularităţi prezintă această funcţiune?

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 11.* Se consideră produsul:

$$P \equiv (x+a)^{10} \cdot \left(x+\frac{1}{a}\right)^{10}.$$

Să se scrie toți termenii produsului, independenți de a.

C. I. B.

VIII. 12. Se dă funcțiunea:

$$y = L(\sin x + \cos x)^{(\sin x + \cos x)}.$$

Să se stabilească relația:

$$x = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,sin}\left[\frac{(y+y'')^2(1 \pm \sqrt{16+(y+y'')^2})}{8}\right].$$

C. I. B.

VIII. 13. Să se afle:

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt{x} \cdot \sqrt[6]{a} + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{a^2}}.$$

C. I. B.

VIII. 14. Se cere adevărata valoare a expresiei:

$$\lim_{x \to \infty} \left[e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}\right]^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)}.$$

G. D. S.

VIII. 15. Să se rezolve sistemul:

$$x+y+z=0$$
$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0$$
$$\frac{x}{b-c}+\frac{y}{c-a}+\frac{z}{a-b}=3.$$

G. D. S.

VIII. 16. Să se arate că determinantul:

$$\begin{vmatrix} a & b & a^4 & a^4 \\ a & b & -b^4 & -b^4 \\ 1 & 1 & a^3 & -ab^2 \\ 1 & 1 & -a^2b & b^3 \end{vmatrix}$$

are valoarea $a^8 - b^8$.

N. B.

VIII. 17. Să se arate că funcţiunile:

$$f(x) = (b-c)(x-a)^2 + (c-a)(x-b)^2 + (a-b)(x-c)^2$$

$$g(x) = (b-c)(x-b)(x-c) + (c-a)(x-c)(x-a) + (a-b)(x-a)(x-b)$$

nu depind de x, fără să se desvolte parantezele. Să se determine valorile lor şi să se deducă, că:

$$f(x) \equiv g(x).$$

N. B.

VIII. 18. Să se studieze variaţiunea funcţiunii:

$$y = \sin x + \cos x.$$

O. N. Ţ.

VIII. 19. Să se studieze şi să se reprezinte variaţiunea funcţiunii:

$$y = \cos x + \operatorname{tg} x .$$

O. N. Ţ.

VIII. 20. Să studieze şi să se reprezinte variaţiunea funcţiunii:

$$y = \sin^3 x + \cos^3 x .$$

O. N. Ţ.

ERATĂ: 1) Vol. I, pag. 100. La exerciţiul V. 74 se va adăuga după cuvântul *Paralela:*
«la bisectoarea interioară a unghiului A».

2) Vol. II, pag. 15. La exerciţiul IV. 81 se va adăuga:
«pentru

$$a = b = c + 4 = d + 5 = 9".$$

3) Vol. II, pag. 15. La exerciţiul IV, 82 se înlocueşte din rândul III „M la AC şi AB" prin „C, B la AB, AC".

Revista „Gazeta Matematică" apare lunar în 48 de pagini. O recomandăm elevilor din clasele VI şi VII cu bogată activitate la „Supliment". Abonamentul de lei 200 anual se trimite D-lui Lt. C-dor. Gr. Zapan, Casa Gazeta Matematică „Calea Griviţei 158 — Bucureşti II".

Soluţiile exerciţiilor propuse se vor redacta conform instrucţiunilor publicate în No. 1, pag. 24 şi se primesc timp de 3 luni dela data propunerii lor.

Drepturile de reproducere sunt rezervate Societăţii „Gazeta Matematică".

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL II. No. 3 — 1 DECEMVRIE 1935

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

BIBLIOTECA CENTRALA „ASOCIAŢIUNII" SIBIU

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa V-a. *Exerc. 96. Intre ce limite trebue să fie cuprins raportul* $\frac{b}{a}$ *pentru ca ecuaţia reciprocă:*

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

să aibă toate rădăcinile reale?

G. D. S.

Deoarece $a \neq 0$ împărţim cu a şi punem $\frac{b}{a} = m$.

Avem:

$$x^3 + mx^2 + mx + 1 = (x + 1)[x^2 + (m - 1)x + 1] = 0.$$

Trebue ca ecuaţia de gr. II, să aibă rădăcini reale, deci:

$$(m - 1)^2 - 4 > 0 \text{ care dă: } \frac{b}{a} \leqslant -1 \text{ sau } \frac{b}{a} \geqslant 3.$$

V. 97. Se dă ecuaţiunea reciprocă de gradul IV.

$$x^4 - (m + 1)x^3 + 2mx^2 - (m + 1)x + 1 = 0.$$

1°. *Să se rezolve;* 2°. *Să se determine valorile lui* m *pentru care toate rădăcinile sunt reale.*

G. D. S.

Impărțim cu x^2 și punem: $x + \frac{1}{x} = y$. Obținem:

$$y^2 - (m+1)y + 2(m-2) = 0.$$

Rădăcinile sunt:

$$y_1 = 2 \; ; \; y_2 = m - 1.$$

Rezolvând ecuațiile:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \quad \text{și} \quad x + \frac{1}{x} = m - 1$$

obținem:

$$x_1 = x_2 = 1 \; ; \; x_{3,4} = \frac{m - 1 \pm \sqrt{m^2 - 2m - 3}}{2}.$$

Pentru a avea toate rădăcinile reale trebue ca:

$m^2 - 2m - 3 \geqslant 0$ care dă: $m \leqslant -1$ sau $m \geqslant 3$.

V. 98. Pe segmentul $\overline{AB}$ *se ia un punct fix* D. *Se construește segmentul de cerc* AMB *capabil de unghiul* α, *iar din* D *se duce o dreaptă ce face cu* AB *unghiul* α *și care întâlnește segmentul de cerc în* M. *Care este locul geometric al lui* M *când unghiul* α *variază?*

G. D. S.

In triunghiul AMB se vede că $\overline{MD}$ este antiparalelă cu MB.
Rezultă: $\overline{AD} \times \overline{AB} = \overline{AM}^2 = \text{const.}$
Locul geometric e cercul de rază AM.

VII. 74. După dans, cei șapte tineri din exercițiul precedent se așează pe șapte scaune ce se află dealungul unui perete, la extremități așezându-se câte un băiat, ceilalți fiind așezați astfel ca fiecare fată să se găsească între doi băeți. Câte așezări distincte se pot forma? In câte din aceste așezări un anumit băiat din cei patru se poate găsi lângă o anumită fată din cele trei?

N. B.

a) La o aşezare a băeţilor corespund 3! aşezări ale fetelor. Băeţii se pot aşeza în 4! moduri diferite.

Deci în total vom avea

$$3!\,4! = 144$$

aşezări distincte.

b) Pentru o aşezare a grupului format de un anumit băiat şi o anumită fată pe care i-am ales, ceilalţi se pot aşeza în $3!\,2! = 12$ moduri diferite.

Deci în total vom avea

$$2 \times 3 \times 12 = 72$$

aşezări în care o pereche aleasă, nu este despărţită de ceilalţi camarazi din grup.

Până la 15 Noemvrie s'au primit soluţiuni bune pentru exerciţiile publicate în numerele 9 Vol. I şi 1, 2, Vol. II dela [1]):

Şcoala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu" Bucureşti.

Clasa VI-a: LUPU MARIA (VI: 93*, 94, 97) ROMAŞCAN G. GEORGETA (VI: 93*, 94, 96*, 97, 99, 104, 105*), STĂNESCU N. VIRGINIA (VI: 93*, 94, 96, 97*, 99, 100).

Liceul de fete „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa IV-a: CLEJAN ALICE (IV: 79*, 80*, 81*, 84* VIII: 1, 2), COHN LYDIA (IV: 79*, 80*, 81*, 84. VIII: 1), MANDSCHEIN I. NORA (IV: 78, 79*), ŞERBĂNESCU P. VIORICA-MADELINA (IV: 78*, 79*, 80*, 81*, 83*, 84*,. V: 107*).

Liceul de fete „Domniţa Ileana" Bucureşti.

Clasa V-a: BĂDULESCU V. VIORICA (V: 104, 105*, 106, 110. VI: 97).

Institutul de fete „Moteanu" Bucureşti.

Clasa IV-a: MUNROE MANUELA (IV: 78*, 79*, 80*, 81*, 83*).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Liceul de fete „Dr. C. Angelescu" Buzău.

Clasa V-a: IONESCU G. MARIA (V: 104*, 105*, 113*, 114*).
Clasa VIII-a: IONESCU G. FILOFTEIA (VIII: 6*, 8, 9*, 11, 13, 15).

Liceul de fete „Ecaterina Urziceanu" Craiova.

Clasa VII-a: VLĂDESCU IVONNE (VIII: 8*, 11),

Institutul „Elena Cuza" Craiova.

Clasa VI-a: ALECU N. GABRIELA (VI: 94, 95, 96*).

Liceul de fete „Oltea Doamna" Iași.

Clasa VI-a: STOICESCU G. CRISTINETA (VI: 97*).

Seminarul pedagogic „Titu Maiorescu" București.

Clasa V-a: BODNĂRESCU M. H. (V: 104*, 105*, 106*, 107*. VI: 93*. 97*. VII: 77*).

Colegiul Național „Sf. Sava" București.

Clasa V-a: CIURESCU I. R. (V: 101, 102, 104*, 105*, 107, 113*, 114, VI: 97*. VII: 77. VII: 15).

Liceul „Matei Basarab" București.

Clasa VI-a: ȘAICHIN O. A. (VI: 93*, 95, 96*, 98*, 99, 100. VII: 77, 78*, 80*, 81*, 82*, 84*, 85*, 86*. VIII: 4*, 5*, 7*, 8*, 9*, 10*).
Clasa VII-a: DULBERGER M. M. (VIII: 1, 2, 6*), DUMITRESCU C. T. (VIII: 1, 2, 6*, 15*), GREGORE S. A. (VII: 93, 95. VIII: 1, 2, 6*, 15*, 16).

Liceul „Gh. Lazăr" București.

Clasa V-a: ANGHELESCU V. E. (V: 104, 105*, 106, 107*).

Clasa VI-a: DROUHET E. E. (VI: 99*, 94, 95), MUNROE M. M. (VI: 99*), SEGAL S. E. (VfII: 1*, 2*, 3, 8, 10*).

Liceul „Mihai Viteazul" București.

Clasa VI-a: ENCIULESCU G. I. (VI: 95).
Clasa VII-a: CRISTESCU I. G. (VII: 78*, 79*, 81*, 82*, 85*. VIII: 1*), DUMITRESCU I. C. (VII. 78*, 79*, 80, 81*, 82*. VIII: 1*).

Liceul „Cantemir Vodă" București.

Clasa VII-a: GEORGESCU N. N. (VII: 79*, 86*. VIII: 6, 13*).

Liceul „Spiru Haret“ Bucureşti.

Clasa IV-a: DIMITRIU I. I. C. (IV: 78*, 80*).
Clasa V-a: STĂNCIULESCU M. (V: 101, 102, 104, 105).
Clasa VI-a: STĂNCIULESCU I. (VI: 94).

Liceul „Aurel Vlaicu“ Bucureşti.

Clasa V-a: HORVAT I. S. (V: 104*, 105*. 106, 107*, 116*. VI: 97*), STOICESCU C. (V: 101, 104*, 114, 116*).
Clasa VII-a: BUZESCU V. A. (VII: 78*, 79*, 80*, 84*, 85*, 86. VIII: 1*, 2*, 3*, 5*, 6*, 7*).

Liceul „Sf. Iosif“ Bucureşti.

Clasa IV-a: CONSTANTIN G. ADRIAN (IV: 84).
Clasa VI-a: POPESCU- ZORICĂ N. A. (VI: 94, 95, 97, 100).

Institutul Schewitz-Thierrin Bucureşti.

Clasa VI-a: MIHĂILESCU L. AL. (VI: 94), SLOMNEANU I. I. (VI: 93*, 94), STORFER R. (VI: 96, 97. VIII: 1*, 2, 6), ULIVI L. L. (VI: 94, 95).

Elevi particulari Bucureşti.

Clasa V-a: POPESCU M. A. (V: 101).
Clasa VIII-a: MECU I. M. (VIII: 6*, 7*).

Liceul „Samuil Vulcan“ Beiuş.

Clasa VII-a: HOMPOLA T. (VII: 77*, 78*, 79*, 80*, 81*, 82*, 83*, 84*, VIII: 1*, 2, 3, 5, 6), MARICA P. (VII: 77*, 79*, 80*, 81*, 82*, 83*. VIII: 6*).

Liceul „Laurian“ Botoşani.

Clasa VII-a: ŢIGHILIU G. R. (VIII: 6, 8).
Clasa VIII-a. GAFENCU A. N. (VIII: 1*, 2, 6, 8).

Liceul „Dinicu-Golescu“ Câmpu-Lung Muscel

Clasa VI-a: DRABAUDT O. N. (VI: 99, 105).

Liceul Militar „Ştefan cel Mare“ Cernăuţi.

Clasa VI-a: GALAN I. (VI: 80*), IVAN ANTON (VI: 80*, 81*), POPLEŞANU G. I. (VI: 71, 74), RUNCEANU C. (VI: 80*), ŞERBĂNESCU M. (VI: 80*).
Clasa VII-a: POPLEŞEANU I. (VII: 79*. VIII: 1*, 2*), ŞERBĂNESCU M. (VIII: 1*, 2*, 3*), STOICA I. (VIII: 1*, 2*).

Seminarul pedagogic universitar Cluj.

Clasa V-a: ESEA A. A. (V: 106), FLORIAN T. T. (V: 107).

Liceul „Codreanu" Bârlad

Clasa VIII-a: IVĂNESCU G. I. (VIII: 6, 7, 8. 13*, 15*).

Colegiul Carol I Craiova.

Clasa VIII-a: MOISOVICI M. Ş. (VIII: 7).

Liceul Militar „D. A. Sturdza" Craiova.

Clasa V: ENESCU D. D. (V: 101, 104).
Clasa VI-a: IOAN M. GRIGORE (VI: 97. VIII: 8).
Clasa VIII-a: COMĂNESCU T. (VIII: 6, 8, 9, 11), TEIŞANU C. S. (VIII: 6, 8, 9).

Liceul „C. Diaconovici Loga" Timişoara.

Clasa IV-a: POTOCEANU N. G. (IV: 78*, 84*), TROCEANU M. G. (IV: 78*, 84*).
Clasa VI-a: MORARIU O. T. (VI: 94, 95, 96, 97*, 98).
Clasa VII-a: KORNIS E. (VII: 77, 78*, 79*. 84*. VIII: 1*, 2*, 3*, 6).

Liceul „Unirea" Focşani

Clasa VIII-a: KIVU C. M. (VIII: 6, 7, 8, 15*).

Liceul Comunităţii Evreilor Galaţi.

Clasa V-a: GROSSMANN M. A. (V: 104, 105, 107. VI: 105).

Liceul „C. Brediceanu" Lugoj.

Clasa V-a: GALL D. Z. (V: 110).
Clasa VI-a: HOLLÄNDER I. I. (VI: 93*, 94, 95), STAMATE I. I. (VI: 104, 105*, 106. VII: 86).

Liceul „Tasse Dumitrescu" Mizil

Clasa IV-a: DIACONU A. C. (IV: 78*, 79*), MĂRĂŞESCU M. C. (IV: 78*, 79*), MAZILU I. I. (78*, 80*), NICOLESCU D. D. (IV: 78*), PANĂ I. I. (IV: 78*, 80*), TEODORESCU G. G. (IV: 78*, 80*).
Clasa V-a: BĂLAN P. V. (V: 104*, 106, 114). BOTEZ M. M. (V: 104 106, 114), BUZNEA C. R. (V: 101, 102, 103, 104*, 105*, 106), GEAMBAŞU V. T. (V: 101, 104*, 106), IONESCU I. T. (V: 101, 104*), TEODORESCU D. C. (104*, 106, 114).

Liceul militar „Nicolae Filipescu" Mânăstirea Dealu.

Clasa II-a: CRĂCIUNESCU I. M. (IV: 79*).
Clasa V-a: FLORESCU L. V. (V: 110*, 111*, 112*, 114*, 115*, VI: 104*, 111. VII: 78*, 79*, 80*, 81*, 82*, 90*, 91*. VIII: 13, 15*, 16), OVIDIU A. G. (V: 114, 115*).

Clasa IV-a: BELLOIU B. D. (VI: 97*, 98*, 105, 107*), NEGULESCU D. ST. (VI: 93*, 97*, 98*, 99. VII: 77*, 79*, 81*, 82*, 83*), NICOLAU L. (VI: 93*, 95, 96, 97*, 98*, 99*, 100*, 104*, 105*, 106*, 107*, 108).

Clasa VII-a: MAZILESCU C. (VIII: 11*).

Clasa VIII-a: DASCĂLU G. I. (VIII: 7*, 8*, 10*, 11*, 15*), LĂZĂROIU I. R. 6*, 7*, 8, 10*, 13, 15*, 16*).

Liceul militar „Nicolae Filipescu" Tg.-Mureș.

Clasa III-a: DIMITRIU V. (IV: 80*), PĂUȚA M. (IV: 80*).

Clasa IV-a: ALEXANDRESCU M. (IV: 79), ANGHELESCU ST. T. (IV: 79, 80*), DRĂGOI C. I. (IV: 78*, 80*), JAREGHIE V. J. (IV: 78*, 80*), MILITARU A. (IV: 78*, 80*), MINGEA M. (IV: 78*), NEAMȚU I. E. (IV: 79, 80*), POP G. I. (IV: 79, 80*), RĂDULESCU T. (IV: 80*), SĂNDULESCU D. IV: 80*), TĂNĂSESCU N. N. (IV: 79*).

Clasa V-a: BÂRZAN I. M. (V: 104*), BEJENARU G. V. (V: 104*, 106 107, 113*, 114, 115*, VI: 93*, 97*), POP A. (V: 104*), SĂNDULESCU I. I. (V: 106: 114, VI: 97*), TĂTARU N. N. (V: 104*, 106*, VI: 97*).

Clasa VI-a: ANDRONACHI V. (VI: 93*, 97*, 99*), BĂDESCU F. I. (VI: 93*, 97*), BOESCU V. (VI: 97*), DĂLBAN C. G. (VI: 93*, 97*, 99*), HUREZEANU E. C. (VI: 93*, 97*), MATEI D. V. (VI: 97*), MUNTEANU L. (VI: 97* 99*), STOINA T. (VI: 93*), NICOLAE N. TOMA (VI: 97*), VULCAN N. C. (VI: VLAICU V. A. (VI: 99*).

Clasa VII-a: BUCURENCIU I. V. (VII: 82).

Clasa VIII-a: BĂDIU V. (VIII: 5*, 6, 8, 9*), DOBRIN (VIII: 6), CIUCĂ I. I. (VIII: 6*, 7*, 9*).

EXERCIȚII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 98.* Să se calculeze valoarea numerică a expresiunei:

$$E = (a+b-c)^3 + (a-b+c)^3 + (-a+b+c)^3 - 3(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

pentru $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{5}{6}$.

C. I. B.

IV. 99. Să se verifice identitatea:

$$(x+a)(x+2a)(x+3a) - (x-a)(x-2a)(x-3a) \equiv 12a(x^2+a^2).$$

C. I. B.

IV. 100. Să se stabilească identitatea:

$$(x+a)(x+2a)+(x+2a)(x+3a)-2(x+3a)(x+a)\equiv 2a^2$$

C. I. B.

IV. 101. Să se stabilească identitatea:

$$(x+a)(x+2a)+(x+2a)x+3a)+2(y+3a)(y+a)$$
$$\equiv(y+a)(y+2a)+(y+2a)(y+3a)+2(x+3a)(x+a)$$

C. I. B.

IV. 102. Să se stabilească identitatea:

$$\left(x+\frac{1}{6a}\right)\left(x+\frac{1}{3a}\right)+\left(x+\frac{1}{3a}\right)\left(x+\frac{1}{2a}\right)$$
$$-\left(x+\frac{1}{6a}\right)\left(2x+\frac{1}{a}\right)\equiv\frac{1}{18a^2}.$$

C. I. B.

IV. 103. Să se stabilească identitatea:

$$(a^3+b)(a+b^2)(a^3-b)-(a^3-b)(a-b^2)(a+b^2)+(a+b^2)(a^3+b)$$
$$(a-b^2)+(a^3-b)(a-b^2)(a^2+b)\equiv 2(a-b)\times$$
$$[a^4+b^4+ab(a^2+ab+b^2+1)].$$

C. I. B.

IV. 104. Să se stabilească identitatea:

$$(a^2+b)(a+b^2)(a^2-b)+(a^2-b)(a-b^2)(a+b^2)$$
$$+(a+b^2)(a^2+b)(a-b^2)-(a^2-b)(a-b^2)(a^2+b)$$
$$\equiv 2(a^2-b^2)(a^2+b^2+a^2b^2).$$

C. I. B.

IV. 105. Să se calculeze:

$$[[(a+b)^2+(a-b)^2]^2+4(a^2-b^2)^2]^2+64(a^4-b^4)^2.$$

C. I. B.

IV. 106. Să se descompună expresiunea:

$$x^4 + 4a^4$$

într'un produs de doi factori (raționali).

O. N. Ț.

IV. 107. Să se descompună expresiunea:

$$81x^8 + 64y^8$$

într'un produs de doi factori (raționali).

O. N. Ț.

Clasa V-a. *Exerc. 120.* Dacă a , d , d' , D sunt latura unui romb, lungimile diagonalelor și diametrul cercului înscris, atunci

$$a \cdot D = d \cdot d'$$

GH. B.

V. 121. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând o latură și știind că bisectoarea AD împarte triunghiul în două triunghiuri isoscele ABD și ADC.

GH. B.

V. 122. Fie AD bisectoarea unghiului A în triunghiul ABC. Să se arate că nici unul din triunghiurile ABD , ADC nu poate fi echilateral.

GH. B.

V. 123. Fie ABC un triunghiu având $\overline{AB} = 8$ cm , $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{BC} = 12$ cm. Pe AB se ia punctul D astfel ca $\overline{AD} = 1{,}6$ cm, iar pe $\overline{AC}$ se ia punctul E, astfel ca $\overline{AE} = 2$ cm.

Paralelele duse prin D și E la AC și AB se întâlnesc în F. Să se arate că AF trece prin mijlocul lui BC.

C. I. B.

V. 124. Să se stabilească identitatea:

$$[(1-\sqrt{a})(1-\sqrt{b})+(1+\sqrt{a})(1+\sqrt{b})] \cdot [(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{b}) + (1+\sqrt{a})(1-\sqrt{b})] \equiv 4(1-ab).$$

C. I. B.

V. 125. Se dau polinoamele:

$$P_1 = x + a,\ P_2 = x^2 + ax + 2a^2,\ P_3 = x^3 + ax^2 + 2a^2x + 3a^3$$

$$P_4 = x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + 4a^4.$$

Să se stabilească identitatea:

$$P_4 + 3a\,P_3 + a^2\,P_2 - 6a^3\,P_1 - 8a^4 = (P_1)^4.$$

C. I. B.

V. 126. Fiind dat polinomul

$$P(x) \equiv x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 5,$$

să se determine polinomul de gradul I

$$x + a$$

cu care împărţit să dea restul 1.

C. I. B.

V. 127. Se dă polinomul

$$P(x) \equiv 3x^4 + mx^3 + 8x^2 + nx - 1.$$

Să se determine parametrii m, n astfel ca $P(x)$ împărţit cu $Q(x) \equiv x^2 + 2x + 3$ să dea restul $x + 2$.

C. I. B.

V. 128. Să se stabilească identitatea:

$$[(a+b)^2 + (c+d)^2][(a-b)^2 + (c-d)^2] - [(a+d)^2 + (b+c)^2] \times$$

$$[(a-d)^2 + (b-c)^2] \equiv 4\,(a+c)\,(b+d)\,(a-c)\,(d-b).$$

C. I. B.

V. 129. Să se arate că polinomul

$$P(x) \equiv x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$$

este divizibil cu $(x-1)$, cu $(x-2)$, cu $(x-3)$ şi să se calculeze câtul prin $(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$.

O. N. Ţ.

Clasa VI-a. *Exerc. 113.* Egalitatea

$$\frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin(a+c)\sin(a-c)} = \frac{\cos^2 b}{\cos^2 c}$$

nu poate fi verificată decât pentru arcul

$$a = (2k \pm 1)\frac{\pi}{2} \cdot$$

N. B.

VI. 114. Dacă

$$\frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin(c+d)\sin(c-d)} = \frac{\cos^2 a \cos^2 b}{\cos^2 c . \cos^2 d}$$

atunci avem şi relaţia:

$$\frac{\sin(a+c)\sin(a-c)}{\sin(b+d)\sin(b-d)} = \frac{\cos^2 a \,.\, \cos^2 c}{\cos^2 b \,.\, \cos^2 d} \cdot$$

N. B.

VI. 115. Dacă

$$\sin x = \frac{1}{\operatorname{tg} y},$$

să se arate că există relaţia:

$$\sin y = \pm \sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+2\operatorname{tg}^2 x}} \cdot$$

C. I. B.

VI. 116. Dacă

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$$

x fiind un arc cuprins între O şi π, să se stabilească relaţia:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{a+b}{a-b} \cdot$$

C. I. B.

VI. 117. Dacă

$$\sin x = \frac{1}{\operatorname{tg} y},$$

să se arate că există şi egalitatea

$$\frac{\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{x}{2}\right)} + \operatorname{tg}(45^0 + y) = 0.$$

C. I. B.

VI. 118. Să se verifice egalitatea:

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{\frac{a^5}{\sqrt[3]{a^2}}}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{a}{\sqrt{a}}}} \cdot \sqrt[30]{\frac{a^5}{\sqrt{a}}} \cdot \sqrt[5]{a^3} = a.$$

C. I. B.

VI. 119. Să se calculeze suma:

$$\frac{1}{(1-a^2)^n} + \frac{1}{(1-a^2)^{n-1}(1+a)} + \frac{1}{(1-a^2)^{n-2}(1+a)^2} + \cdots + \frac{1}{(1-a^2)(1+a)^{n-1}} + \frac{1}{(1+a)^n}.$$

C. I. B.

VI. 120. Să se simplifice fracţia:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2} - 10\sqrt{x} + 35\sqrt[3]{x} - 50\sqrt[6]{x} + 24}{\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} + 2}.$$

C. I. B.

VI. 121. Să se stabilească identitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{(a-b)(b-c)} + \sqrt{(b-c)(c-a)} + \sqrt{(c-a)(a-b)}}} \equiv \frac{\sqrt{2}\left[\sqrt{(a-b)^3} + \sqrt{(b-c)^3} + \sqrt{(c-a)^3} + \sqrt{(a-b)(b-c)(c-a)}\right]}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}.$$

C. I. B.

VI. 122. Să se stabilească egalitatea :

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{b-c}}+\frac{1}{\sqrt{c-a}}}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt[4]{\frac{a-b}{(b-c)(c-a)}}+\sqrt[4]{\frac{b-c}{(c-a)(a-b)}}+\sqrt[4]{\frac{c-a}{(c-a)(a-b)}}\right].$$

C. I. B.

Clasa VII-a. *Exerc. 97.* Să se găsească adevărata valoare a fracţiei :

$$E=\frac{a^6-2a^5b+a^4b^2+a^2b^4-2ab^5+b^6}{a^4-2a^3b+2a^2b^2-2ab^3+b^4}$$

pentru $a=b=1$.

A. A. R.

VII. 98. n, p, q şi n', p', q' fiind două grupe de numere întregi descrescătoare, cuprinse între numerele întregi m şi r, să se stabilească relaţia :

$$\frac{C_m^n C_n^p C_p^q C_q^r}{C_m^{n'} C_{n'}^{p'} C_{p'}^{q'} C_{q'}^r}=\frac{(m-n')!\,(n'-p')!\,(p'-q')!\,(q'-r)!}{(m-n)!\,(n-p)!\,(p-q)!\,(q-r)!}.$$

C. I. B.

VII. 99. $m_1, m_2, \ldots, m_n$ şi $m'_1, m'_2, \ldots, m'_n$ fiind două grupe de câte n numere întregi, descrescătoare, cuprinse între numerele întregi m şi m'. Să se stabilească relaţia :

$$\frac{C_m^{m_1} C_{m_1}^{m_2} C_{m_2}^{m_3} \ldots C_{m_{n-1}}^{m_n} C_{m_n}^{m'}}{C_m^{m'_1} C_{m'_1}^{m'_2} C_{m'_2}^{m'_3} \ldots C_{m'_{n-1}}^{m'_n} C_{m'_n}^{m'}}=\frac{(m-m'_1)!\,(m'_1-m'_2)!\ldots(m'_{n-1}-m'_n)!\,(m'_n-m')!}{(m-m_1)!\,(m_1-m_2)!\ldots(m_{m-1}-m_n)!\,(m_n-m')!}.$$

C. I. B.

VII. 100. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$A_m^6 - 24m \cdot C_m^4 = 14\, A_m^4.$$

C. I. B.

VII. 101. Să se calculeze expresiunea:

$$E = 2[2[2(2+1)+1]+1]+1] - 16.$$

Să se generalizeze.

I. L.

VII. 102. Să se arate că avem:

$$x^3(x^3+2)^3 + (2x^3+1)^3 + (3x^2)^3 = (x^6+7x^3+1)^2.$$

I. L.

VII. 103. Să se arate că avem:

$$(a+b)^8 + (a-b)^8 - 2(a^8+b^8) = 28a^2b^2[2(a^2+b^2)^2 + a^2b^2].$$

I. L.

VII. 104. Să se determine domeniul de existenţă al funcţiunei:

$$y = \sqrt{\sin x + \cos x}.$$

O. N. Ţ.

VII. 105. Să se determine domeniul de existenţă al funcţiunii:

$$y = \sqrt{\sin^3 x - \cos^3 x}.$$

O. N. Ţ.

VII. 106. Să se determine domeniul de existenţă al funcţiunii:

$$y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}.$$

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 21.* Să se arate că polinomul:

$$P(x) \equiv (x+1)^6 - 8x(x+1^4) + 32x^2(x+1)^2 - 64x^3$$

se divide cu $(x-1)^2$ şi să se afle câtul.

N. B.

VIII. 22. Să se deducă din exercițiul precedent că polinomul:

$$Q(x) \equiv (x-1)^6 + 8x(x-1^4) + 32x^2(x-1)^2 + 64x^3$$

se divide cu $(x+1)^2$.

Să se deducă apoi câtul diviziunei și să se desvolte $Q(x)$ după puterile lui $(x+1)$.

N. B.

VIII. 23. Să se arate că polinomul:

$$P(x) \equiv (x+1)^6 - 6x(x+1)^4 + 32x^3$$

se devide cu $(x-1)^4$ și să se afle câtul.

N. B.

VIII. 24. Să se rezolve ecuația:

$$(x-1)^6 + 6x(x-1^4) - 32x^3 = 0$$

știind că are o rădăcină multiplă de ordinul 4.

N. B.

VIII. 25. A, A_1, A_2, A_3, fiind 4 puncte pe o dreaptă, să se determine pe această dreaptă un punct M astfel ca:

$$\overline{A_1M}^3 + \overline{A_2M}^3 + \overline{A_3M}^3 + \overline{AA_1}^3 + \overline{AA_2}^3 + \overline{AA_3}^3 = 0.$$

C. I. B.

VIII. 26. Se dau punctele A_1 și A_2. Dacă M_1 și M_2 sunt puncte situate pe A_1A_2, astfel încât:

$$\frac{\overline{A_1M_1}}{\overline{M_1A_2}} = \lambda \quad , \quad \frac{\overline{A_1M_2}}{\overline{M_2A_2}} = \frac{1}{\lambda}$$

să se arate că

$$\frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} .$$

C. I. B.

VIII. 27. Se dau în plan punctele $A(a, b)$, $B(c, d)$ şi abscisa $a + c$ a punctului M situat pe dreapta AB.

Să se afle:

1°. In ce raport împarte M segmentul AB,

2°. Ordonata punctului M.

3°. Coordonatele conjugatului său armonic în raport cu A şi B.

C. I. B.

VIII. 28. Se dau în plan punctele:

$A(a + b, a - b)$, $B(a + d, a - d)$,

$C(c + d, c - d)$, $D(c + b, c - b)$.

Să se arate că ABCD este paralelogram.

C. I. B.

VIII. 29. Se dau punctele:

$A(a + 3, b + 4)$, $B(a + 1, b + 3)$, $C(a + 2, b + 5)$

$A'(a' + 7, b' + 8)$, $B'(a' + 5, b' + 7)$, $C'(a' + 6, b' + 9)$.

Să se arate că triunghiurile ABC, A'B'C' sunt egale.

C. I. B.

VIII. 30. Se dau punctele:

$A(a + m, b + n)$, $B(a + p, b + q)$, $C(a + r, b + t)$

$A'(c + m, d + n)$, $B'(c + p, d + q)$, $C'(c + r, d + t)$.

Să se arate că triunghiurile ABC, A'B'C' sunt egale.

C. I. B.

Revista „Gazeta Matematică“ apare lunar. O recomandăm elevilor din clasele VI, VII şi VIII cu bogată activitate la „Supliment“. Abonamentul de lei 200 anual se trimite D-lui Lt. C-dor. Gr. Zapan, Casa Gazeta Matematică „Calea Griviţei 158 — Bucureşti II“.

Soluţiile exerciţiilor propuse se vor redacta conform instrucţiunilor publicate în No. 1, pag. 24 şi se primesc timp de 3 luni dela data propunerii lor.

Drepturile de reproducere sunt rezervate Societăţii „Gazeta Matematică“.

Dr 4-

BIBLIOTECA CENTRALA
„ASOCIATIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL II. No. 4 — 1 IANUARIE 1936

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa IV-a. *Exerc. 73. Un arab murind lasă moştenire, celor trei fii ai săi, mai multe cămile, cerându-le să le împartă în modul următor: cel mare să ia o jumătate, al doilea o treime, iar al treilea a noua parte din cămile.*

După moartea lui, cei trei fii observă că tatăl lor se înşelase în socotelile sale şi că nu pot face împărţirea. Se adresară atunci unui om înţelept ca să-i descurce. Acesta adaugă cămila sa la grupul lor de cămile, face împărţirea cerută de testament, dând fiecăruia partea cuvenită, din noul grup de cămile, şi mai rămâne cu cămila sa. Câte cămile a avut bătrânul arab?

N. B.

1°. *Soluţie aritmetică.* Din totalitatea cămilelor (care cuprinde şi pe a înţeleptului) băieţii iau $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$ părţi, $\frac{1}{18}$ fiind cămila înţeleptului. Deci arabul a avut 17 cămile.

2°. *Soluţie algebrică.* x fiind numărul de cămile lăsate de arab, vom avea ecuaţia:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{3}+\frac{x+1}{9}=x$$

$$\therefore \quad x=17.$$

Clasa V-a. *Exerc. 77. Ce relaţii trebue să existe între coeficienţii ecuaţiilor:*

$$x^2 + px + q = 0 \; ; \; x^2 + p'x + q' = 0$$

pentru ca suma a două din rădăcinile lor să fie egală cu suma celorlalte două.

N. B.

1°. $x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$

$p = p'.$

2°. $x_1 + x'_1 = x_2 + x'_2$

$x_1 - x_2 = x'_2 - x'_1$

$p^2 - 4q = p'^2 - 4q'.$

V. 107. Intr'un triunghiu dreptunghiu ABC, *mediana corespunzătoare catetei* AB *este egală cu cateta.*

Să se arate că raportul dintre ipotenuză şi cealaltă catetă este $\sqrt{\frac{7}{3}}$.

C. I. B.

Se notează $\overline{AB} = a$ şi D piciorul medianei vârfului C. Din triunghiul ACD se calculează $\overline{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; iar din triunghiul ABC,

$$\overline{CB} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Clasa VI-a. *Exerc. 99. Fie* ABCD *un trapez,* E *şi* F *mijloacele laturilor neparalele* AB, DC — G *un punct pe* DE, *astfel ca* $\overline{DG} = 2\,\overline{GE}$ *şi* H *un punct pe* BF, *astfel ca* $\overline{BH} = 2\,\overline{HF}$.

Să se arate că dreapta GH *e paralelă cu diagonala* AC.

C. I. B.

G e centrul de greutate al triunghiului ABD. Dacă I este mijlocul lui $\overline{BD}$, AI trece prin G şi

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GI}} = 2.$$

La fel, H fiind centrul de greutate al triunghiului DBC, HI trece prin H şi

$$\frac{CH}{IH} = 2.$$

Deci în triunghiul AIC , GH e paralelă cu AC.

Clasa VII-a. *Exerc. 72. Să se studieze variaţia funcţiei:*

$$y = (x+2)\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}.$$

N. B.

Funcţia există dacă:

$$\frac{x+1}{x+3} \geqslant 0$$

adică pentru $x \leqslant -3$, şi $x \geqslant -1$

$$y' = \frac{x^2+5x+5}{\sqrt{(x+1)(x+3)^3}}.$$

Derivata se anulează pentru valorile $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$, din care numai $x = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ e cuprinsă în intervalul de existenţă.

Vom avea tabloul:

x	$-\infty \ldots -\frac{5+\sqrt{5}}{2}$	-3		-1	0	$+\infty$
y'	$+ + + + 0 - - -$	.		$+ + +$	$+ + +$	
y	$-\infty$ creşte M descreşte $-\infty$ (maxim)			0 creşte $\frac{2}{\sqrt{3}}$	creşte $+\infty$	

unde

$$M = \left(2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{\frac{-5-\sqrt{5}+2}{-5-\sqrt{5}+6}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}}.$$

(In cele de mai sus s'a considerat pentru valoarea radicalului $\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$ numai determinarea pozitivă).

VII. 79. Să se transforme în expresie calculabilă prin logaritmi:

$$E = \sin a + \sin (a - 2b) + \sin 2 (a - b).$$

C. I. B.

$$E = 2 \sin (a - b) \cos b + 2 \sin (a - b) \cos (a - b)$$
$$= 4 \sin (a - b) \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a - 2b}{2}.$$

VII. 80. Să se rezolve ecuația:

$$\sin x + \sin (x - 30^0) = \sin (30^0 - 2x).$$

C. I. B.

Ecuația se poate scrie

$$\sin x + \sin (x - 2 . 15^0) + \sin 2 (x - 15^0) = 0.$$

Și având în vedere exercițiul VII. 79,

$$4 \sin (x - 15^0) \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x - 30^0}{2} = 0.$$

Deci:

$$\sin (x - 15^0) = 0. \qquad x = 180^0 K + 15^0$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \qquad x = (2K + 1) . 180^0$$

$$\cos \frac{x - 30^0}{2} = 0 \qquad x = (2K + 1) 180^0 + 30^0.$$

VII. 81. A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu oarecare,* S *aria triunghiului, iar* R *raza cercului circumscris, să se stabilească identitatea:*

$$[\cos A + \cos (B - C)] [\cos B + \cos (C - A)] [\cos C + \cos (A - B)] = \frac{2 S^2}{R^4}.$$

C. I. B.

$$\cos A + \cos (B - c) = \cos (B - C) - \cos (B + C) = 2 \sin B \sin C.$$

Dar

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R ,$$

Deci

$$\cos A + \cos (B - C) = \frac{bc}{2R^2}, \text{ etc.,}$$

şi primul membru al egalităţii devine

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{8R^6} = \frac{16R^2 S^2}{8R^6} = \frac{2S^2}{R^4} .$$

VII. 82. A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu oarecare, iar* r *şi* R *razele cercurilor înscris şi circumscris, să se stabilească identitatea:*

$$\frac{1}{\cos A + \cos (B - c)} + \frac{1}{\cos B + \cos (C - A)} + \frac{1}{\cos C + \sos (A - B)} = \frac{R}{r} .$$

C. I. B.

S'a arătat, VII. 81 pag. 68.

$$\cos A + \cos (B - C) = \frac{bc}{2R^2} .$$

Membrul I al egalităţii devine :

$$2R^2 \left[\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}\right] = \frac{2R^2 (a+b+c)}{4RS} = \frac{Rp}{S} = \frac{Rp}{pr} = \frac{R}{r} .$$

VII. 83. Să se stabilească egalitatea

$$4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \left(\frac{\sin A}{r_a} + \frac{\sin B}{r_b} + \frac{\sin C}{r_c}\right) = \frac{p}{Rr}$$

A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu* — a, b, c *laturile,* p *semiperimetrul,* R *şi* r *razele cercurilor circumscris şi înscris, iar* r_a , r_b , r_c , *razele cercurilor exînscrise.*

C. I. B.

$$r_a = \frac{S}{p - a} \quad , \quad \sin A = \frac{a}{2R} .$$

Deci :

$$\frac{\sin A}{r_a} = \frac{a(p-a)}{2RS} = \frac{2a(p-a)}{4RS} = \frac{2a(p-a)}{abc} = \frac{2(p-a)}{bc}$$

$$\frac{\sin A}{r_a} + \frac{\sin B}{r_b} + \frac{\sin C}{r_c} = 2\left[\frac{a(p-a)+b(p-b)+c(p-c)}{abc}\right]$$

$$= 2\left[\frac{2p^2-(a^2+b^2+c^2)}{abc}\right] = 2\left[\frac{2p^2-(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}{abc}\right]$$

$$= -\frac{4p^2}{abc} + 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Şi deci valoarea membrului I al egalităţii propuse este

$$\frac{4p^2}{abc} = \frac{4p^2}{4RS} = \frac{p^2}{Rpr} = \frac{p}{Rr}.$$

Până la 15 Decemvrie s'au primit soluţiuni bune pentru exerciţiile publicate în numerele 1, 2, 3 dela [1]) :

Şcoala de fete „Marica Brâncoveanu" Bucureşti.

Clasa V-a : Bucescu Ioana (V : 101, 110, 111, 112, 114), Nicolau A. Elena (V : 101, 102, 104, 105*, 106*, 110, 111, 112), Popescu Iri na (V 101, 102, 104*, 105, 106*, 110*, 111, 112, 114).

Clasa VI-a : Lupu N. Maria (VI : 95, 96, 99*, 100*, 103, 104), Mazilu C. Dacia (VI : 55), Romaşcan G. Georgeta (VI : 95, 100*, 101*, 103, 106*, 107*, 118, 120, VII : 77, 92, VIII : 15), Stănescu N. Virgina (VI : 103*, 104*, 105*, 106, 108*, 110, 111, 118*, VII : 77, VIII : 21, 23).

Clasa VII-a : Bursan Anca (VII : 78*, VIII : 1*, 6*), Conea Lucreţia (VIII : 1*, 6*), Gilortenu P. Adina (VII : 78* : VIII : 1*, 6), Sotiriu Elena (VII : 78*, 79*, VIII : 1*, 6*).

Şcoala de fete „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa IV-a : Paladescu Cristina (IV : 78*, 79*, 80*, 81*, 83*, 84*, 85*, 86*, 87*, 88*, 89*, 90*, 92*, 94*, 95*, 107*, 109*, 117*), Pastia Mariana (IV : 94), Şerbănescu P. Viorica (IV : 94, 95, 99*, 100*, 101*, V : 101*, VIII : 2).

Clasa VI-a : Iacoby D. Marcela (VI : 104*, 105*, 111, VIII : 1, 2*).

Liceul de fete „Domniţa Ileana" Bucureşti.

Clasa V-a : Bădulescu Viorica (V : 101*, 102*, 111*, 112*, 113*, VIII : 1*, 2*).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Liceul de fete „Moteanu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: MUNROE MANUELA IV: 84*, 85*, 86*, 87*), ŞERBĂNESCU GEORGETA (IV: 92, 94).

Liceul „Carmen Sylva“ Bucureşti.

Clasa VII-a: VASILIU MARIA (VII: 88*).

Liceul de fete „Bolintineanu“.

Clasa IV-a: DENIGU TEODORA (IV: 79.

Liceul de fete „Dr. C. Angelescu“ Buzău.

Clasa V-a: IONESCU MARIA (V: 101, 112).
Clasa VIII-a: IONESCU FILOFTEIA (VIII: 1*, 5*, 16*).

Liceul de fete Caracal.

Clasa VI-a: MUSCELEANU ILEANA (VI: 93, 94, VIII: 5*).

Liceul de fete „Elena Cuza“ Craiova.

Clasa VI-a: ALECU N. GABRIELA (VI: 107, 111).

Liceul „Ecaterina Urziceanu“ Craiova.

Clasa VII-a: VLĂDESCU IVONNE (VII: 88*, 90*, 91*, VIII: 5*).

Şcoala „Oltea Doamna“ Iaşi.

Clasa VII: STOICESCU G. CRISTINETA (VI: 94, 95).

Şcoala normală „Andrei Şaguna“ Sibiu.

Clasa VI: IONESCU LAETIŢIA (VI: 100*).

Liceul de fete Târgovişte.

Clasa VI-a: DIACONESCU A. ECATERINA (VI: 93*, 97).

Seminarul pedagogic „Titu Maiorescu“ Bucureşti.

Clasa V-a: BODNĂRESCU M. H. (V: 101*, 102*, 108*, 110*, 111*, 112*, 113*, 114*. 115*, 116*, 117*, VI: 94, 95, 96, 103*, 104*, 105*, 106*, 107*, 108*, 109, 110, 111, 118, VII: 86).
Clasa VI-a. BANCIU V. M. (VI: 93*, 94*, 95*, 97*, 105*, 110*, 111*, 118*, 119*).

Colegiul naţional „Sf. Sava“ Bucureşti.

Clasa V-a: CIURESCU I. R. (V: 106, 112*, 115, 119, 144, VI: 94, 95, 108*, 111, VIII: 1*).

Liceul „Matei Basarab“ Bucureşti.

Clasa VII-a: DUMITRESCU C. T. (VII: 93*, 97*, 98*' 99*, 100*, 102*, 103*, VIII: 7*, 8*, 14*, 16*), GREGORE S. A. (VII: 84*, 94, 97*, 98, 99*, 100, 102*, 103*. VIII: 7*, 8*, 11, 13*), ŞERBAN F. M. (VII: 98*, 99*, 102*, VIII: 6*, 16*).

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti.

Clasa V-a: Ionescu V. G. (V: 101, 106, 112, 114, 115, 118, 119).

Clasa VI-a: Aramă C. (VII: 77*, 103*. 104*, 105*, 111, VIII: 13, Drouhet F. F. (VI: 104*, 108), Munroe M. M. (VI: 101*, 102*, 109*, 110, 111), Popescu F. M. (VI: 97, 118*),

Clasa VII-a: Bălan L. M. (VII: 77*, 78*, 79, 80*, 81*, 82*, 83*, 87*, 88*, 90*, 91, 93*, VIII: 1*, 2*, 6*, 15*, 16*), Begu I. Şt. (VII: 77*, 78*, 79*, 81*, 82*, 83*, 90*, 91*, 92*, 93*, VIII: 1*, 2*, 3*, 6*, 11*, 16*), Drăghicescu F. M. (VII: 77*, 78*, 79*, 80*, 81*, 82*, 83*, 87*, 88*, 90*, 91*, 92, 93* VIII: 1*, 2*, 6*, 11*, 16*), Iordache I. C. (VII: 77*, 78*, 79*, 81*, 82*, 83*, 90*, 91*, 92, 93*, VIII: 1*, 2*, 3*, 6*, 11*, 16).

Liceul „Mihai Viteazu" Bucureşti.

Clasa IV-a: Dumitraşcu R. N. (IV: 99*, 100*).

Clasa V-a: Constantinescu G. (V: 101, 106, 111, 112, 113, 114*, 119).

Clasa VI-a: Enciulescu G. I. (VI: 105*, 106), Rauch I. I. (VI; 94, 98, 105*, 110, 111).

Clasa VII-a: Beiu-Paladi G. E. (VII: (78, 81*, 82, VIII; 1*, 6*).

Liceul „Spiru Haret" Bucureşti.

Clasa IV-a: Dimitriu I. I. (V: 122*).

Clasa VI-a: Chisiceanu M. (VI: 94, 95, 96, 98*, 104*, 110, 115*, 116*, 118*, Stănculescu I. (VI: 95, 97*, 100*, 111).

Liceul „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa V-a: Horvat S. (V: 101*), Stoicescu Const. (V: 101, 102*, 106*, 107*, 112*, 124*, VI: 97*).

Clasa VII-a: Buzescu A. (VII: 87, 88*, 90*, 91*, 94, 95. VIII: 11*, 113*, 115*, 16*).

Liceul „Cantemir Vodă" Bucureşti.

Clasa VII-a: Georgescu N. (VII: 78, 90*, 91*, VIII: 1*, 2*, 3*).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa IV-a: Bobină S. (IV: 92, 94), Constantin G. A. (IV: 94*), Georgescu V. (IV: 92), Niculescu D. (IV: 78*, 79, 84*, 100*, 101*, VIII: 1*, 2*), Niculescu E. (VIII: 1*), Tomasini G. I. (IV: 84*).

Clasa VI-a: Popescu Zonca A. (VIII: 21, 23).

Institutul „Schewit Thienin" Bucureşti.

Clasa VI-a: Mihăilescu L. A. (VI: 106, 111, 118), Nicola V. G. (VI: 111), Niculescu S. L. (VI: 120), Slomneanu I. I. (VI: 165, 106, 109, 111), Storfer R. (VI: 105, 111), Teodorescu I. N. (VI: 111), Ulivi L. (VI: 93*, 105, 106), Zamfirescu G. M. (VI: 106).

Liceul „Mihail Eminescu" Bucureşti.

Clasa VI-a: BĂDULESCU V. V. (VI: 103, 105, 106, 107*, 110).

Liceul „Marele Voevod Mihaiu" Bucureşti.

Clasa V-a: SCHWARTZ JWEL (103, 110, 111*, 115, 116, 117, 124, 125, VI: 97, 104, 108*).

Clasa VIII-a: STOICA D. A. (VIII: 1*, 2*, 4*, 6*, 11*, 12, 13*, 15*, 16*, 17*, 18),

Elevi particulari Bucureşti.

Clasa VIII-a: MECU I. M. (VIII: 1*, 2*, 3*), 8*, 15*, 16*, 28*).

Liceul „Codreanu" Bârlad.

Clasa IV-a: PAVELESCU V. D. (IV: 78*, 80*. V: 101*, 111*, 114, 115*).

Clasa VIII-a: IVĂNESCU I. (VIII: 1*, 16*).

Liceul „Samuel Vulcan" Beiuş.

Clasa V-a: JIDANU J. C. (V: 101, 104*, 106, 110, 111, 112, 113, 114, 115*), DOTODEA I. V. (V: 106, 111, 114).

Clasa VI-a: KILNER G. G. VI: 93*, 94, 97*).

Clasa VII-a: CHIRVAI I. V. (VII: 77*, 78*, 79*, 80*, 8, 82*, 83*, VIII: 1*, 5*, 6*), HOMPOLA I. T. (VII: 87*, 88*, 92*, 93*, VIII: 4, 8, 9*, 11*, 15* 16*), MAURICA P. (VII: 78*, 91, 95, VIII: 1*, 4. 5, 8*, 11, 13, 16*, 17).

Clasa VIII-a: POPESCU V. F. (VIII: 18).

Liceul „Laurian" Botoşani.

Clasa V-a: CIOMAGA IOAN (V: 101).

Clasa VII-a: ŢIGHILIU R. (VIII: 1*, 2*).

Liceul „Andrei Şaguna" Braşov.

Clasa V-a: COJANU A. (V: 101, 102).

Clasa VI-a: RUSSU N. L. (VI: 105).

Şcoala comercială superioară Brăila.

Clasa I-a: BURTEA M. S. (IV: 78*, 79, 80*, 81). BĂLĂNICĂ ST. ST. (IV: 78*, 79, 80*, 92), BĂRBULESCU G. (IV: 78*, 79, 80*, 92), CLIMATIANU V. G. (IV: 78*. 79, 80*, 94), DUMITRIU G. N. (VI: 78*, 79, 80*, 94), EFTIMESCU R. C. (IV 78*, 79, 80*), FRANDI ST. I. (IV: 78*, 79, 80*, 94, 95) GRÜNBERG S. Z. (IV: 78*, 79, 80*, 92, 94), MANOLE L. V. (IV: 78*, 79, 80*. 90, 94), MÂRZA A. I. (V: 78*, 79, 80*, 92), MIRONOVICI O. (IV: 78*, 79, 80*, 92), OIŞER P. M. (IV: 79*, 79, 80*, 92). POPÂRLAN G. G. (IV: 78*, 79, 80*, 92), POPESCU P. D. (IV: 78*, 79, 80*, 92), PACH E. L. (IV: 79*, 79, 80*, 92), SERESCU T. M. (IV: 78*, 79, 80*, 92), SOBONEA S. M. (IV: 78*, 79, 80*, 94, 95), STĂNILĂ G. I. (IV: 78*, 79, 80*, 94, 95, 98*, 90*, 100*, 101*, 102*). STANEF D. V. (IV: 78*, 79, 80*, 92), STĂNESCU N. G. (IV: 78*, 79, 80*, 92, 94), TOMA N. G. (IV: 78*, 79, 80*, 92), TEODORESCU A. E. (IV: 78*, 79, 80*, 92), VASILESCU N. N. (IV: 78*, 79, 80*, 92), VOINESCU D. G. (IV: 78*, 79, 80)

Liceul „Dinicu Golescu" C-lung Muşcel.

Clasa VIII-a: POPESCU V. F. (VIII: 1*, 5, 6, 8*, 9*, 16).

Liceul militar „Ştefan cel Mare", Cernăuţi.

Clasa V-a: ALEXANDRESCU G. P. (V; 101, 110*, 111, 113*, 114*, 116*), BĂLĂUŢĂ GH. (V: 101), BĂRGĂUANU M. (V: 112, 114), BAŞOLDEA G. G. A, (VI: 94, 111), BOBULESCU A. (V: 101, 112), BREŢCANU C. (V: 112, 114), CAPRIŞ M. (V: 101), CONSTANTINESCU D. (V: 101, 111, 112), COSMA A. (V: 101, 114), DOBRESCU G. (V: 101), DOMBROVSHI I. (V: 101), DUMITRESCU V. M. (V: 101, 106*, 112, 114), LAZĂR DANIIL (V: 101), MANOLESCU R. (V: 101), MĂTIEŞ E. M. (V: 101, 112, 114), METZ M. (101, 112, 114), MOTOC R. (V: 101), PĂUNESCU V. (V: 101, 106*), PETROVICI C. C. (V: 114), POALELUNGĂ G. V. (V: 101, 114), POPOVICI A. (V: 101), ŞERBĂNESCU N. S. (V: 101, 111, 112, 114), STĂNESCU V. (V: 101), VASILIU N. (V: 101).

Clasa VI-a: APOSTOL G. N. (VI: 94), BOŞOLODEA G. G. (VI: 93*, 97*), BOSINCEANU D. G. (VI: 94), CRUŢESCU N. T. (VI: 94), FLOAREŞ I. A. (VI: 94), GHEORGHIU A. (VI: 94) LAZĂR A. (VI: 93*, 94), NEDELCU V. N. (VI: 93*, 94, 95, 96, 97*, 104*, 105*, 111), NISTORESCU V. D. (VI: 94), POPA C. B. (VI: 94), TOMESCU G. T. (VI: 97).

Clasa VII-a: BĂLEANU EM. (VII: 91*), CARAMAN V. (VIII: 11*, 16), GALAN I. (VII: 90*, 91*, VIII: 96*), IVAN A. (VII: 90*, 91*), LEFTER G. (VIII: 16), POPLEŞEANU I. (VIII: 16*), ŞERBĂNESCU A. M. (VIII: 11*), STOICA P. I. (VIII: 11*, 16), VASILESCU N. (VII: 91).

Liceul ortodox Cernăuţi.

Clasa VII-a: MENDEL T. (VIII: 1*, 2*, 16*, 21).

Şcoala conductori Cernăuţi.

An I: FAIN B. (V: 112).

An II: BALL I. V: 112*), SLAMOVITS E. (V: 111, 112*, VI: 111), STRUM S. (V: 112, VI: 94).

Liceul militar Chişinău.

Clasa V-a: BURGHELEA CEZAR (V: 101, 111*).

Clasa VI-a: PĂDUREŢ V. (VI: 100*), PÂNTESCU C. (V: 101, 111).

Clasa VII-a: BULAT M. (VIII: 21, 23).

Seminarul pedagogic universitar Cluj.

Clasa V-a: ESCA A. (V: 101, 102*, 103*, VIII: 1, 2*, 3), IONESCU S. (V: 102*), KANNTS I. (V: 101, 102*, 111*, 112), TIBERIU FLORIAN (V: 101, 102*).

Clasa VII-a: GHEORGHESCU C. (VII: 92, VIII: 1*, 16*).

Şcoala normală Cluj.

Clasa IV-a: ŞIPOŞ G. (IV: 88, 89, 90, 91), BRIC T. I. (IV: 88,89 94) CÂŢU D. E. (IV: 88, 90, 94), POP G. I. (IV: 90, 94).

Liceul „Gh. Barițiu", Cluj.

Clasa VI-a: NIŢESCU C. G. (VI: 94 95).

Colegiul „Carol I", Craiova.

Clasa V-a: POPESCU O. (V: 101*, 102*, 111*, 112).
Clasa VI-a: BIŢĂ H. T. (VI: 94, 95, 96, 111).
Clasa VIII-a: MAISOBICI S. (VIII: 1*, 16*).

Liceul militar „D. A. Sturza" Craiova.

Clasa V: ALEXANDRESCU P. (V: 112), SANDRU G. (V: 101*), SAVU M. (V: 101), SRAJAN M. (V: 101*).
Clasa VI-a: CIOC D. (VI: 94, 95, 96, 98, 107*, 110, 111, VIII: 5*), IOAN G. (VI: 94, 95, 96, 101)*, VIII: 5*), IONESCU FULGER M. C. (VI: 94), FAŞOIU N. M. (VI: 94, 95, 96, 98*, 110, 111).
Clasa VIII-a: COMĂNESCU T. (VIII: 1, 2*, 4*, 5*, 18), DULĂMIŢĂ (VIII: 1*, 2*), GEORGESCU G. (VIII: 10*), ILIESCU D. (VIII: 5*), TEIŞANU C. S. (VIII: 5*, 16; 21, 22, 23, 24).

Liceul „Unirea" Focşani.

Clasa VII-a: FOCŞENEANU S. (VII: 78*).
Clasa VIII-a: KIVU M. (VIII: 1*, 2*, 3*, 5*, 16*),

Liceul comunității Evreilor Galați.

Clasa V-a: GROSSMAN A. (V: 101, 102, 111, 112), WEISSENBERG M. (V: 101*, 102*, 103*, VIII: 1*, 2*, 3*, 5).

Liceul „Ioan Măiorescu", Giurgiu.

Clasa VI-a: MARINESCU D. G. (VI: 110, 111, VIII: 5).
Clasa VII-a: NEDELESCU A. (VII: 78*, 90*. 91, 92, 93*, VIII: 1*, 2*, 15*, 16).

Liceul „Național" Iași

Clasa VI-a: IONESCU M. (VI: 94, 95, 96),

Liceul Militar Iași.

Clasa VII-a: BUCUR VIRGIL (VII: 91*, 92).

Liceul „Coriolan Brediceanu", Lugoj

Clasa V-a: CIUPAG R. (V: 101, 102*), DRĂGAN I. (V: 101, 102*, 112, 118, 119), GALL D. Z. (V: 101, 102*, 119), POPOVICI (V: 101, 102*), SFERCOVICI (V: 101, 102*, 112).
Clasa VI-a: STAMATE I. (VI: 100*, 110, 111).
Clasa VII-a: BERINDEI T. (VII: 78*. VIII: 1*).

Liceul „Tasse Dumitrescu" Mizil

Clasa IV-a: ANGELESCU P. G. (IV: 94), DIACONU A. C. (IV: 90, 92, 94), DOBRESCU I. G. (IV: 88, 90, 94), FOTIN G. I. (IV: 94), MĂRĂŞESCU M. (IV: 93, 94), MAZILU I. I. (IV: 88, 90, 94), NICOLESCU D. D. (IV: 94), PANĂ I. I. (IV: 88, 90, 94), RADU G. N. (IV: 94), SÂN PETRU I. T. (IV: 94, 95), TEODORESCU I. G. (IV: 88, 90, 94).

Clasa V-a: BOTEZ M. (V: 101, 112), GEAMBAŞU T. (V: 102*, 112), GHEORGHIU V. (V: 101, POPESCU M. A. (VI: 94), TEODORESCU C. (V: 101).

Clasa VI-a: TIANU I. G. (VI: 94, 95).

Internatul „Iordăchescu" Ploeşti.

Clasa V-a: NICOLESCU C. (V: 111*).

Liceul „M. Eminescu" Satu Mare.

Clasa V-a: GORSCHI A. (V: 111, 112*).

Clasa VI-a: BLEIER A. (VI: 111), FILIP G. I. (VI: 96, 111), IOSIF IORDAN, (VI: 94, 95, 96, 107*, 110, 111), LASZLO M. (VI: 94, 96, 111), NAGY F. G. (VI: 94, 96).

Clasa VIII-a: BALTAZAR HORVATH (VIII: 1*, 15).

Şcoala normală „Andrei Şaguna" Sibiu.

Clasa VI-a: IONESCU G. L. (VI: 94. 95, 96), RĂŞĂNESCU N. I. (VI: 95, 94, 96, 111, VIII: 2*).

Liceul „Durostor" Silistra.

Clasa V-a: VARTOLOMEU H. (V: 129).

Liceul „Enăchiţă Văcărescu" Târgovişte.

Clasa VIII-a: IONESCU S. N. (VIII: 15), PASCAL I. C. (VIII: 15).

Liceul militar „N. Filipescu" Târgovişte.

Clasa II-a: CRĂCIUNESCU I. M. (IV: 98*, 99*, 100*, 101*, 102*, 103*, 104*, 105*, 106*, 107*, VII: 86*).

Clasa IV-a: PAPAZIAN G. (IV: 94, 95).

Clasa V-a: AL. GEORGE OV. (V: 111*, 112), BERBECIU V. C. (V: 101, VI: 94, VII: 78*, VIII: 1*), DASCĂLU G. I. (VII: 18), FLORESCU L. V. (V: 129, VI: 113*, 114*), MANOLESCU P. N. (V: 101*, 102*, 103, 111, 112*, VI: 94, 95, 96, VIII: 1*), POPESCU SILVIU (V: 111*, 112*), POSTELNICESCU ST. (V: 101, 102*, 103*, 111, 112*), PROTOPOPESCU M. (V: 101*, VI: 94, VIII: 1*), RĂDULESCU O. (V: 101, 102*, 103*, 111*, 112*, VI: 98, VII: 78*, 88*, 90*, 91*, VIII: 1*, 5*, 15*), 16*) VLĂDOIANU GH. (V: 101*, 111*, 112*, VI: 107*).

Clasa VI-a; BELLOIU B. D. (VI: 95, 111), NEGULESCU D. ST. (VI: 94, 95, 96, 100*, 107*, 108*, 114*, VII: 78*, 90*, 91*), NICOLAU C. L. (VI: 111).

Clasa VII-a; CERCEL OV. (VII: 90*, 91*), MARINESCU E. (VII: 78*, 91*. VIII: 1*, 2*), MAZILESCU C. (VII: 78*, 91*, VIII: 1*, 2*, 15*), MUŞAT G. (VIII: 1*), NICULESCU G. (VII: 78*, 91*, VIII: 1*, 16*), PETCU G, (VIII: 16*).

Clasa VIII-a: DASCĂLU I. (VIII: 16*), NICOLESCU G. (VIII: 1*, 17).

Liceul militar „Mihai Viteazu" Târgu-Mureş.

Clasa III-a: PĂNŢĂ M. (IV: 94).

Clasa IV-a: ALEXANDRESCU M. (IV: 94), RĂDULESCU T. (IV: 94).

Clasa V-a: BÂRZAN M. (V: 101, 102*), BEJENARU V. (V: 101, 102*, 111*, 112*, VI: 100*), GEORGE A. G. (V: 101), IACOB ST. (V: 101, VI: 94), POP A. (VI: 94, 95), RĂDULESCU G. O. (V: 94, 96, 109, 110, 111), SĂNDULESCU C. (V: 101, 102*), SĂNDULESCU J. OLT (101*), SĂNDULESCU I. (V: 111, 112), STOIAN M. (V: 101), TĂTARU N. N. (V: 101*, 102*, 111*, 112*, VI: 94, 95), VULCAN N. C. (V: 94).

Clasa VI-a: ANDRONACHE V. (VI: 94, 100*), BĂDESCU F. I. (VI: 94, 100*), BOBORODEA I. (VI: 94, 100*, VIII: 1*), DĂLBAN C. GH. (VI: 94, 95, 96, 98*, 100*), DANIELESCU I. A. (VI: 94, 95), HORTOPAN G. GR. (VI: 94), HUREZEANU E. C. (VI: 95, 96, 100*), MATEI D. V. (VI: 94, 95, 96), MOSORA N. (VI: 94, 95, 96, 100*), MUNTEANU LAZĂR (VI: 100*), NICOLAE A. T. (VI: 94, 100*), SECHEL M. (VI: 94, 95, 100*), VLAICU V. A. (VI: 94, 95).

Clasa VII-a: BUCURENCIU V. (VII: 78*).

Liceul „Diaconovici Loga" Timişoara

Clasa IV-a: POTOCEANU N. G. (IV: 89, 95), ROŞCA A. A. (IV: 94), TROCEANU G. M. (IV: 88, 89, 91*, 92, 94, 95), VASILESCU A. M. (V: 100*, 102*, 103*, 111, 112*, VI: 94, 95, 98, 100*, 107*, 108*, VII: 85, 86*, VIII: 4*, 5*).

Clasa VI-a: MORARIU O. T. (VI: 107*. 111).

Clasa VII-a: KORNIS E. (VII: 90*, 91*, 92, 93*. VIII: 15*, 16, 21).

Liceul „Principele Carol", Tulcea

Clasa V-a: HASAPI MIRCEA (V: 101).

Liceul „Traian" Turnu Severin

Clasa IV-a: SCURTU PETRE (V: 111*).

Fără indicaţie de şcoală

Clasa VI-a: TILICĂ S. (VIII: 1, 23).

Clasa VII-a: BAZAC A. (VIII: 21, 23).

N. R. S'au primit multe soluţiuni bune şi unele foarte bune, care însă nu au fost semnate. Rugăm pe corespondenţii noştri să ia cunoştinţă de îndrumările publicate în Nr. 1 al „S. G. M." pentru redijarea soluţiunilor.

EXERCIȚII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 108.* Să se verifice identitățile:

$$\frac{1}{a(b+c-a)}\left[\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a+c-b}\right]$$

$$\equiv\frac{1}{b(c+a-b)}\left[\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\right]$$

$$\equiv\frac{1}{c(a+b-c)}\left[\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{b+c-a}\right].$$

N. B.

IV. 109. Se dă șirul de $2n$ fracțiuni:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{1}{a}}+\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{a}}}+\ldots$$

Se cere suma lor.

I. L.

IV. 110. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}-x+\frac{7}{6}=1.$$

O. N. Ț.

IV. 111. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\frac{x}{6}+\frac{7x}{12}+\frac{13x}{20}=\frac{1-x}{30}+\frac{1-7x}{42}.$$

O. N. Ț.

IV. 112. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\frac{x+1}{3}+\frac{x+2}{4}-\frac{2x+3}{6}=\frac{5x+2}{12}.$$

Să se verifice soluțiunea găsită.

O. N. Ț.

IV. 113. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\frac{3x+5}{36}+\frac{7-9x}{24}=\frac{3456x+6544}{72000}$$

și să se verifice soluțiunea aflată.

O. N. Ț.

IV. 114. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\frac{3x^2+7x-11}{5x^2-9x+13}=\frac{36}{60}$$

și să se verifice soluțiunea aflată.

O. N. Ț.

IV. 115. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\frac{137x^2+45x+45}{5438x^2-60x-60}=\frac{36}{48}$$

și să se verifice soluția aflată.

O. N. Ț.

IV. 116. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\frac{3x+5}{5x-7}=\frac{11-9x}{17-15x}.$$

O. N. Ț.

IV. 117. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\frac{123456}{x+1}+\frac{234567}{x+2}=\frac{358023}{x+3}$$

și să se verifice soluțiunea.

O. N. Ț.

IV. 118. Se notează

$$X=(+5)+(-1)\quad,\quad Y=(-3)-(+7);$$
$$Z=-(+4)+(-2)\quad,\quad T=(+8)-(-6).$$

Să se arate că

$$X+Y-Z=0 \qquad -X+Y+T=0$$
$$Z+T-X=X \qquad Z-T-Y=Y.$$

N. M.

IV. 119. Se dă planele P, Q, R şi dreapta D'. O dreaptă Δ mobilă se sprijină pe D şi rămâne paralelă cu planele Q şi R. Să se afle locul geometric al intersecţiei dreptei Δ cu planul P.

N. M.

Clasa V-a. *Exerc. 130.* Să se demonstreze că dacă a este latura neparalelă a unui trapez isoscel, d diagonala, h înălţimea şi D diametrul cercului circumscris, atunci avem:

$$D \cdot h = a \cdot d .$$

GH. B.

V. 131. Peste un canal cu malurile paralele să se construiască un pod PP', care să fie văzut sub 45° din un observator O. Discuţii asupra poziţiilor lui O pentru ca construcţia să fie posibilă.

GH. B.

V. 132. Să se construiască un triunghiu dreptunghiu cunoscând ipotenuza BC şi piciorul D al uneia din bisectoarele unghiului A.

GH. B.

V. 133. Se cunosc bazele a şi b ale unut trapez circumscriptibil la un cerc. Se cere să se construiască segmentul de dreaptă care uneşte punctele de tangenţă ale laturilor neparalele.

GH. B.

V. 134. Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni.

$$x + y = xy$$

$$y + z = yz$$

$$z + x = zx$$

GH. B.

V. 135. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând unghiul pe care-l face latura BC cu diametrul AO al cercului circumscris, latura AC şi distanţa dela piciorul bisectoarei AA' la AO.

GH. B.

V. 136. Să se calculeze:

$$a\left[\frac{a+b+c}{a+b-c}+\frac{a-b+c}{-a+b+c}\right]+b\left[\frac{a+b+c}{-a+b+c}+\frac{a+b-c}{a-b+c}\right]$$
$$+c\left[\frac{a+b+c}{a-b+c}+\frac{-a+b+c}{a+b-c}\right].$$

C. I. B.

V. 137. Să se stabilească egalitatea:

$$a\cdot\frac{\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}}{\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}}+b\cdot\frac{\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}}{\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}}+c\cdot\frac{\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}}{\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}}=0.$$

C. I. B.

V. 138. Dacă $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\neq 0$, să se arate că rădăcina ecuațiunii:

$$\left(x+\frac{a}{b}\right)\left(x+\frac{b}{c}\right)+\left(x+\frac{b}{c}\right)\left(x+\frac{c}{a}\right)+\left(x+\frac{c}{a}\right)\left(x+\frac{a}{b}\right)$$
$$=\left(x+\frac{a}{c}\right)\left(x+\frac{b}{a}\right)+\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(x+\frac{c}{b}\right)+\left(x+\frac{c}{b}\right)\left(x+\frac{a}{c}\right)$$

nu depinde de a, b, c.

Ce se întâmplă, dacă nu este îndeplinită condiția dată?

C. I. B.

V. 139. Să se simplifice:

$$\frac{(a+b)^3+(a+b)^2+(a+b)+1}{(a+b)^3-(a+b)^2+(a+b)-1}.$$

C. I. B.

V. 140. Să se rezolve cât mai simplu sistemul:

$$3x+2y=12$$
$$2y+5z=11$$
$$5z+3x=11$$

O. N. Ț.

V. 141. Să se rezolve sistemul:

$$x_2 x_3 x_4 x_5 + x_3 x_4 x_5 x_1 = a_1 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$
$$x_3 x_4 x_5 x_1 + x_4 x_5 x_1 x_2 = a_2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_1$$
$$x_4 x_5 x_1 x_2 + x_5 x_1 x_2 x_3 = a_3 x_3 x_4 x_5 x_1 x_2$$
$$x_5 x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_4 = a_4 x_4 x_5 x_1 x_2 x_3$$
$$x_1 x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 x_5 = a_5 x_5 x_1 x_2 x_3 x_4 .$$

O. N. Ț.

V. 142. Să se stabilească identitățile:

$$3x\,[2(y+z) - x] + (y+z-2x)^2$$
$$= 3y\,[2(z+x) - y] + (z+x-2y)^2$$
$$= 3z\,[2(x+y) - z] + (x+y-2z)^2$$
$$= (x+y+z)^4.$$

N. M.

V. 143. Să se stabilească identitățile:

$$[x - 2(y+z)]^2 + [2x - (y+z)]^2 + 6x(y+z) - 3(y+z-x)^2$$
$$= [y - 2(z+x)]^2 + [2y - (z+x)]^2 + 6y\,(z+x) - 3\,(z+x-y)^2$$
$$= [z - 2(x+y)]^2 + [2z - (x+y)]^2 + 6z\,(x+y) - 3\,(x+y-z)^2$$
$$= 2\,(x+y+z)^2.$$

N. M.

Clasa VI-a. *Exerc. 123.* Se dă expresiunea:

$$E = x^{y^{x^y}} .$$

Făcându-se $x = 2$ și $y = 3$, apoi $x = 3$ și $y = 2$, se obțin două expresiuni numerice. Care din ele va fi mai mare.

I. L.

VI. 124. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\sin x = 0{,}1$$

GH. B.

VI. 125. Un număr N are doi factori primi.

Fie P produsul tuturor divizorilor lui N.

Se cere să se găsească N, știind că numărul divizorilor lui P este 496 și că

$$\log P = 24{,}09570.$$

GH. B.

VI. 126. Pe laturile unui triunghiu ABC se iau punctele M pe BC, N pe CA şi P pe AB, astfel ca să avem:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k.$$

Să se arate că suprafaţa triunghiului MNP este

$$S \cdot \frac{1 - k + k^2}{(1+k)^2},$$

unde S este suprafaţa triunghiului ABC.

U. M. F.

VI. 127. Să se rezolve triunghiul dreptunghiu, având ipotenusa $a = 128$, iar între cele două catete şi unghiurile ascuţite relaţiunea:

$$b \cos B + c \cos C = 192.$$

O. N. Ţ.

VI. 128. Să se rezolve triunghiul dreptunghic, ştiind că o catetă este egală cu proiecţiunea ipotenusei pe bisectoarea unghiului ascuţit opus catetei. O. N. Ţ.

VI. 128. Să se rezolve triunghiul dreptunghic, ştiind că proiecţiunea ipotenusei, pe bisectoarea unuia din unghiurile ascuţite, este egală cu jumătate laturei pătratului înscris în cercul circumscris triunghiului. O. N. Ţ.

VI. 129. Se consideră două cercuri tangente în punctul A la aceeaşi dreaptă AT, cercurile O şi I. In cercul O ducem coarda $\overline{AB}$ de lungime dată a. Punctul C, diametrul opus lui B, îl unim cu punctul A, iar secanta CA determină coarda $\overline{AD}$ în cercul I. Să se calculeze lungimea coardei $\overline{AD}$ în funcţiune de datele problemei.

Aplicaţie: $R = 148$ m; $r = 96$ m; $\overline{AB} = 84$ m.

O. N. Ţ.

VI. 130. Să se rezolve ecuaţia:

$$a^x \cdot a^{3x} \cdot a^{5x} \cdots a^{(2n-1)x} = a^{n^2}.$$

N. M.

VI. 131. Să rezolve ecuaţia

$$\cos x \left(\cos x + \cos \frac{5\pi}{6}\right) = 3 \sin \frac{5\pi}{6}.$$

N. M.

Clasa VII-a. *Exerc. 107.* Să se pună sub formă de produs determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} ab & a+b & c^2 \\ bc & b+c & a^2 \\ ca & c+a & b^2 \end{vmatrix}.$$

G. D. S.

VII. 108. Să se pună sub formă de produs determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} ab & a+b & a^2+b^2 \\ bc & b+c & b^2+c^2 \\ ca & c+a & c^2+a^2 \end{vmatrix}.$$

G. D. S.

VII. 109. Câte puncte de intersecție rezultă din întretăierea a n drepte în același plan, dintre care p prin același punct și q sunt paralele?

G. D. S.

VII. 110. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z &= 1 \\ ax + a^2y + z &= 1 \\ a^2x + y + az &= 1. \end{aligned}$$

C. I. B.

VII. 111. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & \frac{1}{x} & x \\ 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = x - 1.$$

C. I. B.

VII. 112. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} \sin^2(a+b) & \sin 2a \cdot \sin 2b & \sin^2(a-b) \\ \sin^2(b+c) & \sin 2b \cdot \sin 2c & \sin^2(b-c) \\ \sin^2(c+a) & \sin 2c \cdot \sin 2a & \sin^2(c-a) \end{vmatrix}.$$

C. I. B.

VII. 113. a_1 , a_2 , a_3 , . . . , a_n fiind numere pozitive, să *se stabilească* relația :

$$\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \log_{a_3} a_4 \ldots \log_{a_n} a_1 = 1.$$

C. I. B.

VII. 114. Să se arate că expresia :

$$7^6 - 2^4 \cdot 3 \cdot 7^4 + 2^7 3^2 \cdot 7^2 - 2^9 \cdot 3^3$$

se divide cu *25*.

N. B.

VII. 115. Să se deducă relația trigonometrică (VI, 89) :

$$a^3 \cos B \cos C + b^3 \cos C \cos A + c^3 \cos A \cos B = abc(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$$

din considerarea determinantului :

$$\begin{vmatrix} a & b\cos C & c\cos B \\ b & c\cos A & a\cos C \\ c & a\cos B & b\cos A \end{vmatrix}.$$

N. B.

VII. 116. Să studieze și să se reprezinte variația funcțiunii :

$$y = \sin^2 2x.$$

O. N. Ț.

VII. 117. Să se studieze și să se reprezinte variațiunea funcțiunii :

$$y = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

O. N. Ț.

VII. 118. Să se studieze variațiunea funcțiunii :

$$y = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x.$$

O. N. Ț.

VII. 119. Să se discute sistemul de ecuațiuni :

$$\begin{aligned} x\sin\theta + y + z\cos\theta &= 0 \\ x + y\cos\theta + z\sin\theta &= 0 \\ x\cos\theta + y\sin\theta + z &= 1 \end{aligned}$$

și să se rezolve în cazul când este determinat.

O. N. Ț.

VII. 120. a, b, c și A, B, C fiind respectiv laturile și unghiurile unui triunghiu, să se rezolve sistemul :

$$\begin{aligned} x\sin A + z\sin C &= a \\ y\sin B + x\sin A &= b \\ z\sin C + y\sin B &= c. \end{aligned}$$

Discuțiune.

O. N. Ț.

VII. 121. Să se rezolve sistemul :

$$x + \lambda y = y + \lambda z = z + \lambda x = 1.$$

N. M.

Clasa VIII-a. *Exerc. 31.* Să se scrie ecuațiunea cercului ce trece prin origină și punctele A (1, 0); B (0, 2). Să se scrie apoi ecuațiunile tangentelor în punctele O, A și B și să se verifice că aceste tangente întâlnesc laturile opuse ale triunghiului OAB în trei puncte colineare.

G. D. S.

VIII. 32. Se dau două puncte fixe A și B pe axa OY și un punct M variabil pe axa OX. Fie O_a și O_b proiecțiunile originei pe dreptele MA și MB.

Să se arate că dreapta $O_a O_b$ trece printr'un punct fix, ale cărui coordonate se cer.

G. D. S.

VIII. 33. Cât face 1 Kg/cm² în centigrame pe kilometru patrat ? I. L.

VIII. 34. Un avion are de parcurs în sbor o distanță în 3 ore. Dacă la jumătatea drumului întâlnește un vânt contrar de $10^{m}/_{sec}$, atunci el va întârzia cu 10 minute. Cu ce iuțeală va trebui să sboare avionul ?

I. L.

VIII. 35. Un avion parcurge, la ducere, o distanță de 200 km, având vântul în față, în $83^m\ 32^s$; iar, la întoarcere, în aceleași condițiuni, în $55^m\ 33^s$, 3. Care este iuțeala avionului ?

I. L.

VIII. 36. Fie A (3, 4) ; B (5, 6) ; C (4, 7) ; D (6, 9).

a) Să se arate că patrulaterul ABCD este un paralelogram. Să se calculeze lungimile laturilor și ale diagonalelor.

b) Să se calculeze suprafața paralelogramului și unghiurile sale interioare.

O. N. Ț.

VIII. 37. Fie în raport cu un sistem de axe ortogonal XOY, punctele : A (a, b) ; B $(a+c\ ,\ b+c)$; C (b, a) ; D $(b-c,\ a-c)$.

a) Ce figură este patrulaterul ABCD ?

b) Să se scrie ecuațiunile dreptelor OA, OB, OC, OD. Interpretare.

c) Să se calculeze distanțele punctelor A, B, C, D la origina O.

d) Ecuațiunile laturilor și diagonalelor patrulaterului ABCD.

O. N. Ț.

VIII. 38. Se dau în plan patru puncte A_1, A_2, A_3, A_4, apoi se iau pe segmentele $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_2 A_3}$, $\overline{A_3 A_4}$ punctele B_1, B_2, B_3, astfel ca :

$$\frac{\overline{B_1 A_1}}{\overline{B_1 A_2}} = -\lambda,\ \frac{\overline{B_2 A_2}}{\overline{B_2 A_3}} = -\lambda,\ \frac{\overline{B_3 A_3}}{\overline{B_3 A_4}} = -\lambda;$$

pe segmentele $\overline{B_1 B_2}$ și $\overline{B_2 B_3}$ se iau punctele C_1 și C_2 astfel ca :

$$\frac{\overline{C_1 B_1}}{\overline{C_1 B_2}} = -\lambda,\ \frac{\overline{C_2 B_2}}{\overline{C_2 B_3}} = -\lambda$$

și în fine pe segmentul $C_1 C_2$ se ia punctul M, astfel ca : $\dfrac{\overline{MC_1}}{\overline{MC_2}} = -\lambda$.

Să se determine coordonatele lui M în funcțiune de coordonatele punctelor date A_1, A_2, A_3, A_4. Generalizare.

O. N. Ț.

VIII. 39. Să se simplifice fracțiunea algebrică :

$$\frac{x^4 - 6x^3 + 23x - 18}{x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 5x - 18}.$$

O. N. Ț.

VIII. 40. Să se simplifice fracțiunea algebrică :

$$\frac{(x+5)^4 - 6(x+5)^3 + 23x + 97}{(x+9)^4 - 8(x+9)^3 + 14(x+9)^2 + 5x + 27}.$$

O. N. Ț.

VIII. 41. Să se simplifice fracțiunea :

$$\frac{x^3 - 7a^2x + 6a^3}{x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4}.$$

C. I. B.

VIII. 42. Să se calculeze aria cuprinsă între curba :

$$x^2 - 4y + 8 = 0$$

și dreptele :

$$2x + y + 2 = 0 \quad \text{și} \quad -2x + y + 2 = 0.$$

G. D. S.

VIII. 43. Fie M_1 , M_2 două puncte pe o dreaptă D și M mijlocul distanței lor, iar O un punct arbitrar.

Avem relația :

$$\operatorname{cotg}(OM , OM_1) + \operatorname{cotg}(OM , OM_2) = 2\operatorname{cotg}(OM , D).$$

N. M.

VIII. 44. Un segment de lungime l, se vede dintr'un punct la depărtarea d, de segment, sub un unghiu v dat de formula :

$$\operatorname{tg} v = \frac{l \cdot d}{p}$$

unde p reprezintă puterea punctului la cercul cu diametrul pe segmentul considerat.

N. M.

VIII. 45. Să se învedereze prin considerație de mecanică, că în planul unui patrulater oricum, există în general patru puncte astfel ca ariile triunghiurilor cu vârful în fiecare din ele și cu bază, respectiv perechi de laturi opuse, să fie egale.

N. M.

Nr 5

BIBLIOTECA CENTRALA
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL II. No. 5 — 1 FEBRUARIE 1936

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa IV-a. *Exerc. 83. Fie* M *un punct pe latura* BC *a triunghiului* ABC. *Tangentele în* M *la cercurile* AMB *şi* AMC *tae respectiv dreptele* AC *şi* AB *în* C' *şi* B'

Să se arate că B' C' *e paralelă cu* BC.

C. I. B.

Avem $\measuredangle AMC' = \measuredangle B$ şi $\measuredangle AMB' = \measuredangle C$.

Deci: $\measuredangle B'MC' = \measuredangle B + \measuredangle C$.

Patrulaterul AB'MC', având unghiurile din A şi M suplimentare, este inscriptibil, de unde

$$\measuredangle AB'C' = \measuredangle AMC' = \measuredangle B$$

ceeace aduce paralelismul dreptelor BC, B'C'.

Clasa V-a. *Exerc. 78. Fie* d_1, d_2, d_3, d_4 *distanţele dela un punct* M *la patru drepte* Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 *din acelaşi plan. Să se determine acel punct, când se cunosc cele două lungimi*

$$l = d_1 + d_2 \ , \ n = d_3 + d_4 .$$

N. B.

Dreptele D_1, D_2 paralele cu dreapta Δ_2 şi la distanţa l de ea întâlnesc pe Δ_1 în A, B. Punctul M se găseşte pe dreptele Δ'_1, Δ'_2 care trec prin A sau B şi formează triunghiuri isoscele cu dreptele Δ_1, Δ_2.

Dreptele D_3 , D_4 , paralele cu dreapta Δ_4 şi la distanţa n de ea întâlnesc pe Δ_3 în C , D. Punctul M se găseşte de asemenea pe dreptele Δ'_3 , Δ'_4 , care trec prin C sau D şi formează triunghiuri isoscele cu dreptele Δ_3 , Δ_4 .

Dreptele Δ'_1 , Δ'_2 întâlnesc dreptele Δ'_3 , Δ'_4 în patru puncte. Deci în general avem patru soluţiuni.

V. 116. Fie ABCD *un trapez dreptunghiu în care* AB *e perpendiculară pe baze şi* I *punctul de întâlnire al diagonalelor* AC, BD.

Dacă diagonalele sunt perpendiculare, să se arate că există relaţiile

$$\overline{AI} \cdot \overline{BI} = \overline{CI} \cdot \overline{DI} \; ; \; \frac{\overline{AI}^3}{\overline{BI}^3} = \frac{\overline{DI}}{\overline{CI}} \; .$$

C. I. B.

In triunghiul dreptunghiu ABD , AI fiind înălţime

$$\overline{AI}^2 = \overline{BI} \times \overline{DI} .$$

La fel, din triunghiul ABC,

$$\overline{BI}^2 = \overline{AI} \times \overline{CI} .$$

Multiplicând aceste două egalităţi, se obţine prima relaţie cerută; împărţindu-le, avem pe a doua.

V. 117. ABCD *fiind un trapez dreptunghiu, în care diagonalele* AC , BD *sunt perpendiculare, distanţa între baze este* a *şi* b *lungimea bazei mari* BC. *Să se calculeze depărtarea punctului de întâlnire al diagonalelor de fiecare vârf.*

C. I. B.

Fie I punctul de întâlnire al diagonalelor AC , BD. Din triunghiul ABC,

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

iar

$$\overline{BI} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \; . \qquad (1)$$

Din triunghiul ABI,

$$\overline{AI} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} . \qquad (2)$$

Din triunghiul BIC,

$$\overline{CI} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} , \qquad (3)$$

iar din ABD,

$$\overline{ID} = \frac{\overline{AI}^2}{BI} = \frac{a^3}{b\sqrt{a^2+b^2}} . \qquad (4)$$

Clasa VI-a. *Exerc. 72. Să se calculeze valoarea expresiei:*

$$E \equiv \sqrt[3]{\frac{tg47^0\,30' - cotg37^0\,20'}{\cos^2 27^0\,15'\,(1+\cos 17^0 5')}} .$$

N. B.

Expresia de sub radical este negativă, deoarece:

$$tg47^0\,30' < cotg37^0\,20'.$$

In acest caz vom considera expresia:

$$E' = -E = \sqrt[3]{\frac{cotg37^0\,20' - tg47^0\,30'}{\cos^2 27^0 15'\,(1+\cos 17^0 5')}}$$

sau:

$$E' = \sqrt[3]{\frac{\cos 84^0\,50'}{2\cos^2 27^0 15' \cos^2 8^0 32'30'' \sin 37^0 20' \cos 47^0 30'}} .$$

Expresia găsită este pozitivă şi calculabilă prin logaritmi.
Se găseşte:

$$E = -E' = -0{,}52194.$$

VI. 79. Să se construiască o sferă de rază dată, trecând printr'un punct dat şi tangentă la două plane date.

N. B.

Fie M punctul dat, P_1 şi P_2 cele două plane, R raza cunoscută.

Centrul sferei se va găsi pe sfera S cu centrul în M şi de rază R, pe unul din planele P'_1, P''_1 la distanţa R de P_1 şi pe unul din planele P'_2, P''_2 la distanţa R de P_2.

Planele P'_1, P''_1 întâlnesc planele P'_2, P''_2 după patru drepte, care pot întâlni sfera S în maximum 8 puncte.

Deci vom putea avea maximum 8 soluțiuni pentru problemă, în unele cazuri având mai puține, iar uneori niciuna.

Observație. Se mai poate rezolva problema considerând în locul planelor P'_1, P''_1, planele bisectoare B_1, B_2 ale planelor P_1, P_2.

VI. 80. Se consideră un dreptunghiu ABC *cu laturile:*

$$\overline{AB} = \overline{CD} = a \quad , \quad \overline{AD} = \overline{BC} = b.$$

Se duce diagonala AC. *O paralelă la latura* BC *întâlnește dreptele* AB, AC, CD *respectiv în* L, M, N.

Să se determine poziția acestei paralele, astfel ca rotind dreptunghiul în jurul laturei CD, *volumul născut prin rotirea triunghiului* ALM *să fie egal cu volumul născut prin rotirea triunghiului* MNC, *și să se arate că această poziție nu depinde de mărimea laturei* b.

N. B.

Avem:

$$V(ALM) = V(MNC)$$

$$V(ALM) + V(AMND) = V(MNC) + V(AMND)$$

$$V(ALND) = V(ACD).$$

Dacă notăm $AL = x$, această egalitate se scrie:

$$2\pi bx = \frac{2\pi ba}{3}$$

$$x = \frac{a}{3}.$$

VI. 104. Fie D, *punctul diametral opus vârfului* A *al triunghiului echilateral* ABC, *pe cercul circumscris, iar* E *mijlocul laturii* $\overline{AB}$. *Să se arate, că*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

C. I. B.

R fiind raza cercului circumscris,

$$\overline{AB} = R\sqrt{3}.$$

Triunghiul DBE este dreptunghiu în B

$$\overline{BD} = R \ , \ \overline{BE} = \frac{R\sqrt{3}}{2},$$

deci

$$\overline{DE} = \frac{R\sqrt{7}}{2} \ .$$

Clasa VIII-a. *Exerc. 7. Să se stabilească egalitatea:*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{(1+\sin^2 a)^2}{1-\sin^2 a \operatorname{tg}^2 a} & \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{cotg}^2 a & \cos^2 a \\ \sin^2 a & \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{cotg}^2 a & \cos^2 a \\ \sin^2 a & \sin^2 a & \operatorname{cotg}^2 a & \cos^2 a \\ \sin^2 a & \sin^2 a & \sin^2 a & \cos^2 a \end{vmatrix} = \sin^2 a$$

pentru $a \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

C. I. B.

Adunând ultima coloană celorlalte, determinantul ia forma celui din exercițiul VIII. 6. Și ținând seama de valoarea obținută la VIII. 6. se găsește

$$D = \cos^2 a \left[\frac{(1+\sin^2 a)^2}{1-\sin^2 a \operatorname{tg}^2 a} + \cos^2 a - 1 \right] \left(\operatorname{tg}^2 a + \cos^2 a - 1 \right) \left(\operatorname{cotg}^2 a + \cos^2 a - 1 \right)$$

$$= \cos^2 a \left[\frac{(1+\sin^2 a)\cos^2 a}{\cos^2 a - \sin^4 a} + \cos^2 a - 1 \right] \left(\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - \sin^2 a \right) \left(\frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} - \sin^2 a \right)$$

$$= \cos^2 a \left[\frac{(1-\sin^4 a)(1+\sin^2 a)}{1-\sin^2 a - \sin^4 a} - \sin^2 a \right] \sin^2 a \, (\cos^2 a - \sin^4 a) = \sin^2 a,$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

Subiectele date pentru lucrarea scrisă de matematici la examenul de admitere în cursul superior al liceelor militare, din sesiunea Iunie 1935

Liceul militar „N. Filipescu" M. Dealu.

Un trapez dreptunghic are suprafața de 30 cm. și înălțimea de 4 cm. Corpul născut din învârtitura trapezului în jurul bazei mari are volumul de 112 cm.

Să se afle:

1. — Lungimile bazelor trapezului;

2. — Suprafaţa acelui corp.

Liceul militar „Mihai Viteazul" Tg.-Mureş.

Suma catetelor unui triunghiu dreptunghiu, este de 42 cm., iar raportul lor 3/4. Se roteşte triunghiul în jurul catetei celei mici şi se obţine un con. Să se calculeze:

1. — Suprafaţa totală a acestui con;

2. — Volumul sferei înscrise în el;

3. — Suprafaţa totală a calotei mari, determinată de cercul de contact, în sferă.

Liceul militar „Ştefan cel Mare" Cernăuţi.

a) Să se reducă la o singură fracţie:

$$\frac{a^2}{a-2x} - \frac{a^2-2x^2}{a+2x} - \frac{30x^2-4x^3}{a^2-2x^2}.$$

b) Un dreptunghiu cu laturile a şi b se roteşte odată în jurul lui a, altădată în jurul lui b.

Să se afle raportul volumurilor corpurilor astfel formate.

Până la 10 Ianuarie s'au primit soluţiuni bune pentru exerciţiile publicate în numerele 1, 2, 3, 4 dela [1]):

Şcoala centrală de fete „Marica Brâncoveanu" Bucureşti.

Clasa V-a: Bucescu Ioana (V: 110, 114), Dumitrescu Jeana (V: 111, 112, 129), Ionescu Florica (V: 111, 112, 129), Nicolau A. Elena (V: 129), Popescu Irina (V: 129), Stoica Maria (V: 101), Teodorescu Elisabeta (V: 101), Vasilescu Paula (V: 111*).

Clasa VI-a: Nasta Amelia Gabriela (VI: 94*, 95*, 96, 100, 111*), Nedelcu Marcela (VI: 109*, 110, 111*), Romaşcan Georgeta (VIII: 5*, 21, 23*), Trofin I. Aurora (VI: 94, 96*, 100, 101*).

Liceul de fete „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa IV-a: Dan Aurora (IV: 90, 92, 94, 95), Paladescu Cristina (IV: 98*, 99*, 100*, 101*, 103*, 104*, 105*, 106*, 107*, V: 111*, 123*), Şerbănescu P. Madelina (IV: 90, 98*, 102*, 103*, 105*, V: 113*, 114*, 115*).

Clasa VI-a; Iacoby D. Marcela (VI: 130), Odobescu M. Simona (VI: 94, 96).

Clasa VII-a: Tănăsescu Venera (VII: 78*).

Liceul de fete „Domniţa Ileana" Bucureşti

Clasa V-a: Bădulescu V. Viorica (V: 114).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Institutul de fete „Moteanu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Munroe M. Manuela (IV: 88*, 89, 90, 91, 94, 96*, 97*), Şerbănescu Georgeta (IV: 78*, 80*, 81*), Tipătescu N. Cornelia (IV: 95).

Externatul ortodox „Zoe Romniceanu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Oancea M. Ileana (IV: 84, 95, VIII: 1*, 2*).

Clasa VII-a: Lazarovici Rozica (VII: 97, VIII: 16), Rociu Margareta (VII: 97, VIII: 16*).

Liceul „Iulia Hajdeu“.

Clasa VIII-a: Stratilescu Victoria (VIII: 1*, 16*).

Liceul de fete „Elena Cuza“ Craiova.

Clasa VI-a: Alecu N. Gabriela (VI: 93*).

Liceul „M. Kogălniceanu“ Galaţi.

Clasa VIII-a: Finkelstein Cornelia (VIII: 1, 16).

Liceul „Oltea Doamna“ Iaşi.

Clasa VI-a: Stoicescu G. Cristineta (VI: 131).

Liceul de fete „Despina Doamna“ Ploeşti.

Clasa V-a: Petrescu N. Mietta (V: 114, VIII: 6).

Liceul „Elena Matei Basarab“ Râmnicul Sărat.

Clasa V-a: Alexandrescu E. Polixenia (V: 101, 102*, 112, 129).

Şcoala Normală „Andrei Şaguna“ Sibiu.

Clasa VI-a: Ionescu G. Laetitia (VI: 93*, 97*, 99*), Ivan Maria (V: 101, 102*, 111, 112*).

Liceul de fete „Carabella“ Târgovişte.

Clasa IV-a: Popescu A. Cornelia (IV: 94, 95), Spălăţeanu I. Stela (IV: 84).

Clasa VI-a: Diaconescu A. Ecaterina (VI: 94, 95).

Liceul de fete „Carmen Sylva“ Timişoara.

Clasa IV-a: Checian N. Ana (IV: 94).

Clasa VII-a: Guttman A. Paraschiva (VII: 121), Spither L. Klaia (VII: 121).

Liceul „Principesa Elena“ Turnu Severin.

Clasa V-a: Moşteoru Silvia (V: 101, 102), Petcoff Aida (V: 101).

Clasa VI-a: Anghelescu Lucreţia (VI: 94, 95, 100, 111), Pârligras Ecaterina (VI: 94, 95).

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa IV-a: Woinarosky O. G. (IV: 90, 95).

Clasa VI-a; Campus E. José (VI: 94), Preciado I. T. (VI: 100*, 130, VIII: 1*), Şaichim O. A. (VI: 94, 109, 110, 111, VII: 91*, 93*, 121, VIII: 1*, 2, 16*).

Clasa VII-a: Dulberger M. M. (VII: 97*, 100*, 102*, VIII: 13*), Şerban F. M. (VII: 93, 97*, 100*, 103*, VIII: 1*, 2*, 7*, 8*), Stere A. I. (VII: 97*, 98*, 99*, 100*, 102*, 103*, VIII: 16*).

Liceul „Spiru Haret" Bucureşti.

Clasa IV-a: Dimitriu I. C. (IV: 92, 94, 95*).

Clasa V-a: Stănculescu M. (V: 108, 129, VI: 101).

Clasa VI-a: Stănculescu I. (VI: 101, 102).

Clasa VII-a: Angelescu C. (VII: 78*), Druţu T. (VII: 78*).

Clasa VIII-a: Iotzu C. A. (VIII: 43, 44).

Liceul „Gheorghe Lazăr" Bucureşti.

Clasa V-a: Angelescu E. (V: 112*), Ionescu V. G. (V: 110).

Clasa VI-a: Drouchet E. E. (VI: 110, 111), Popescu F. M. (VI: 94, 95, 111).

Clasa VII-a: Begu I. S. (VII: 121).

Clasa VIII-a: Segal E. (VIII: 5*).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa IV-a: Augustin M. M. (IV: 94), Balázs L. (VIII: 1, 2*), Craiu D. G. (IV: 94, 118), Niculescu C. D. (IV: 94), Niculescu C. E. (IV: 92, 94, 106, 107).

Clasa V-a: Geller M. (V: 101, 112), Mazzetti F. (V: 101, 102*).

Clasa VI-a: Popescu Zorica N. A. (VI: 131).

Liceul „Mihai Viteazu" Bucureşti.

Clasa VI-a: Enciulescu G. I. (VI: 111), Rauch L. I. (VI: 97).

Clasa VII-a: Cristescu I. Gh. (VII: 90, 91, 121, VIII: 16*), Dumitrescu C. (VII: 90*, 97, 103).

Liceul „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa V-a: Fulga L. T. (V: 101, 106*, 110*, 112*, 114*, VI: 93*, 97*), Horvath I. S. (V: 109, 111*. 112*, 120), Stoicescu E. C. (V: 111*, 129, 142, VI: 94).

Colegiul naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa V-a: Ciurescu I. R. (V: 106, 111*, 112*, 129, VI: 111, VII: 97).

Clasa VI-a: Stroescu M. (VI: 94, VIII: 21*, 23*, 24).

Liceul „Cantemir Vodă" Bucureşti.

Clasa VI-a: Capriel A. (VI: 100*).

Clasa VII-a: Georgescu N. N. (VII: 78*, 90*, 91*, 97, 121, VIII: 16).

Seminarul pedagogic „Titu Maiorescu“ Bucureşti.

Clasa V-a: Bodnărescu H. (VIII: 21, 22, 23, 24*).

Institutul „Schewitz Thierrin“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Niculescu L. (VII: 97), Teodorescu I. N. (VI: 111).

Liceul „Marele Voevod Mihai“ Bucureşti.

Clasa V-a: Schwartz I. (V: 129).

Liceul „Codreanu“ Bârlad.

Clasa V-a: Gâlca C. (V: 101, 102*).
Clasa VI-a: Palade G. G. (VI: 94*, 95*, 96*).
Clasa VII-a: Edelstein L. (VII: 78*, 91*, 97, VIII: 16), Ghinea I. (VIII: 1*, 2*, 3*).

Liceul „Samuel Vulcan“ Beiuş.

Clasa IV-a: Bâlgea P. I. (IV: 84, 85, 86, 91, V: 121, 122).
Clasa V-a: Jidanu I. C. (V: 122, 129), Moş Teodor (V: 101, 112).
Clasa VI-a: Hompola T. (VI: 86, 87, VIII: 21, 23, 24), Killner G. (VI: 110).

Liceul „Sf. Vasile“ Blaj.

Clasa VII-a: Hossu I. (VII: 78).

Şcoala comercială superioară Brăila.

Clasa I-a B. Bălănică Şt. Şt. (IV: 94, 95), Chiriazi A. N. (IV: 94, 95), Mironovici O. (IV: 94, 95), Martin C. (IV: 92, 94, 95), Manole V. (IV: 95), Oişer P. M. (IV: 94, 95), Popârlan Ş. (IV: 94, 95), Popescu D. (IV: 94, 95), Stăncescu N. G. (IV: 95), Stanef D. V. (IV: 94, 95), Teodorescu D. E. (IV: 94, 95), Vasilescu N. N. (IV: 94, 95), Zalman Gr. (IV: 95).

Liceul „A. Şaguna“ Braşov.

Clasa IV-a: Anastasescu G. M. (IV: 95).
Clasa V-a: Cojocaru A. (VII: 97).

Liceul „L. I. Asan“ Caracal.

Clasa VIII-a: Clipea I. (VIII: 1*, 16).

Liceul „Traian Doda“ Caransebeş.

Clasa V-a: Florescu I. I. (V: 112, 121).

Liceul „V. Lucaciu“ Carei.

Clasa VIII-a: Popoviciu G. (VIII: 1*, 5*, 16, 17, 18, 20 21, 22*, 23, 24).

Liceul ortodox de băieţi Cernăuţi.

Clasa VII-a: Mendel E. T. (VIII: 6*).

Liceul militar Cernăuți.

Clasa VII-a: Băleanu Em. (VIII: 16).

Școala de conductori arhitecți Cernăuți.

Anul II. Ball I. (V: 113, 115, VI: 106, VIII: 13), Fain B. (V: 117), Galeriu V. (V: 110, VI: 106), Ghilezan I. (V: 106), Iosipescu A. C. (VIII: 13), Lebzelter B. (V: 106), Runzer I. (V: 106, VI: 106), Scutaru I. (V: 106, 113*, 114, 115*, VI: 106*, VIII: 13*), Slamovits E. (V: 113, VII: 77).

Liceul militar Chișinău.

Clasa V-a: Burghelea C. (V: 104*, 124*, 125, 129), Enescu A. (V: 111*, 129), Nemțeanu M. (V: 110*, 129), Pântescu C. C. (V: 113*, 114*, 120*, 124*, 125*, 129), Potolici A. (V: 112*, 129), Vițelaru I. (V: 111* 129), Zolotovici D. (V: 111*, 129).

Clasa VI-a: Pădureț A. V. (VI: 93, 110).

Clasa VII-a: Bulat L. M. (VII: 97, VIII: 6).

Seminarul pedagogic universitar Cluj.

Clasa V-a: Borza A. (V: 101*, 102*, VI: 94), Esca A. (V: 104*, 106), Iacob M. (V: 101), Kauntz I. J. (V: 104*, 105*, 106*, 110*, 114*, 115*, VI: 97), Vaianu V. T. (V: 101, 102*, 103*, 111, 112, 123, VI: 94, VIII: 1*, 2*, 3*).

Clasa VII-a: Gheorghescu G. C. (VIII: 6).

Liceul „Gh. Barițiu" Cluj.

Clasa VI-a: Nițescu C. G. (VI: 93*, 97*, 99*, 102*).

Școala normală de băieți Cluj.

Clasa IV-a: Brie T. I. (IV: 78*, 90*, 106, 107), Câțu D. E. (IV: 78*, 106, 107), Pop G. I. (IV: 78*, 106, 107), Șipoș G. (IV: 78, 106, 107), Cuibius I. (IV: 106, 107).

Clasa V-a: Ghincuțan H. T. (V: 110).

Colegiul „Carol I" Craiova.

Clasa IV-a: Gheorghiu D. P. (IV: 84, 90, 94), Grămescu M. (V: 111*, 112*), Mihăiceanu G. R. (IV: 118).

Clasa V-a: Antonescu A. St. (V: 109), Cetate Ciceiu (V: 129), Geamăneanu D. G. (V: 118), Popescu D. O. (V: 104*, 105*, 109, 114*, VI: 97*).

Liceul „Frații Buzești" Craiova.

Clasa VIII-a: Amărăștеanu M. (VIII: 1*, 2*, 3*, 5*, 17, 21, 22, 23*, 24*).

Liceul militar „D. A. Sturza" Craiova.

Clasa IV-a: Bădescu F. C. (IV: 84, V: 112).

Clasa V-a: Corâciu I. M. (V: 111*, 112), Enescu D. D. (V: 105*, 106, 114*, 129), Lupu I. G. (V: 101*, 112, 129), Manta N. S. (V: 106*), Muraru P. D. (V: 101, 104), Nicolae D. T. (V: 104, 105, 106, 142, 143), Sandru M. G. (V: 104*, 106*), Tustoiu F. (V: 101).

Clasa VI-a: Afronie I. (VI: 130), Cioc I. D. (VI: 97*, 103, 104*, 105*, 106*, VII: 97, VIII: 8*, 13*), Ionescu Fulger M. C. (VI: 93*, 97), Paşoi N. M. (VI: 93*, 97, 104*, 105*, VIII: 13*),

Clasa VII-a: Catrina C. (VIII: 6*, 8*), Dulămiţă G. I. (VIII: 6*, 8*, 9*), Georgescu I. G. (VIII: 7*, 8*, 9*), Iliescu V. D. (VIII: 6*, 7*, 8*, 9*, 16*), Teişanu C. S. (VIII: 11), Segărceanu M. M, (VIII: 18, 20).

Liceul „Dragoş Vodă" Câmpulung Moldova.

Clasa V-a: Corlaţan St. L. (V: 142).

Liceul „N. Gane" Fălticeni.

Clasa V-a: Irimescu S. D. (V: 104, 106*, 129).

Liceul „Unirea" Focşani.

Clasa VI-a: Nadolu A. (VI: 100).

Clasa VII-a: Focşeneanu S. (VII: 87, 90*, 91*, 92), Martac R. (VIII: 1*, 2*, 5*).

Liceul comunităţii evreilor Galaţi.

Clasa V-a: Grossman M. A. (V: 129, 142), Katz A. (V: 101, 111, 129, VIII: 1, 2), Weissenberg M. A. (V: 111*, 112*, 129, VI: 94, 95, 111, VIII: 23).

Clasa VI-a: Behrmann S. M. (VI: 94, 110, 111, VIII: 1*, 2*), Bernstein C. A. (VI: 109, 110).

Liceul „Ion Maiorescu" Giurgiu.

Clasa VI-a: Barbu A. A. (VI: 94, 96, 105*, 110), Marinescu D. G. (VI: 103*, 105*).

Clasa VII-a: Nedelescu N. A. (VII: 79*, VIII: 6*, 11*).

Liceul „Naţional" Iaşi.

Clasa V-a: Schwartz W. (V: 111*, 112).

Clasa VI-a: Ionescu M. C. (VI: 93, 97).

Liceul „Internat" Iaşi.

Clasa IV-a: Apotecker F. (IV: 95, 106, 107).

Clasa V-a: Bedreag C. M. (V: 129).

Clasa VI-a: Andronic M. (VI: 130).

Clasa VII-a: Matei D. (VIII: 1*, 3, 16*).

Liceul militar „G-ral Makarovici" Iaşi.

Clasa VII-a: Bucur N. V. (VII: 81*, 82*, 91*, 97, 102, 103, 104, VIII: 6*).

Liceul „Coriolan Brediceanu" Lugoj.

Clasa V-a: Ciupag S. R. (V: 113*, 114*), Constantinescu C. L. (V: 101, 112, 118, 119), Drăgan J. (V: 106*, 113*, 114*, VI: 106*), Gall D. Z. V: 101, 102, 113, 114*), Kaminszky St. St. (V: 101, 112, 118, 119, 129),

Mihăileanu C. (V : 112, 118, 129, VI : 94), Neumann F. F. (V : 101, 112, 129, 142, 143), Popovici Gh. (V : 112, 114*, 143, VI : 94), Popovici M. (V : 101, 112), Sfercoci T. I. (V : 114*, 129).

Clasa VI-a : Stamate I. (VI : 101*, VIII : 17, 23), Sedmik C. V. (VI : 94, 95*, 96*).

Clasa VII-a : Berindei V. T. (VII : 77*, 79*, 80*, 81*, 82*).

Clasa VIII-a : Wiener E. (VIII : 1*, 2*, 3).

Liceul „Tasse Dumitrescu" Mizil.

Clasa IV-a : Diaconu A. C. (IV : 84), Dobrescu G. (IV : 79), Fotin G. I. (IV : 91), Mărăşescu M. C. (IV : 84), Pană I. I. (IV : 84), Sâm-Petru I. T. (IV : 78*, 84), Teodorescu I. Gh. (IV : 84, 95 , Voiculescu V. A. (V : 94).

Clasa V-a : Botez M. M. (V : 124*, 125, 129), Buznea C. R. (V : 114), Geambuşu V. T. (V : 114, 124*, 125, 129), Gheorghiu M. V. (V : 104, 106*, 114), Popescu M. A. (V : 114, 129).

Liceul „Petru Rareş" Piatra Neamţ.

Clasa IV-a : Soroceanu V. D. (IV : 84).

Clasa VIII-a : Albu N. G. (VIII : 16*, 21*, 23*, 24*), Lazaride V. G. (VIII : 1*, 2*, 3*, 4*, 5*, 16*, 18), Mihăilescu P. (VIII : 1*, 2*, 3*, 5*. 6*).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel" Ploeşti.

Clasa V-a : Grigorescu N. (V : 101, 102*).

Liceul „Roman-Vodă" Roman.

Clasa V-a : Locker I. (V : 101, 102*, 111*, 112*), Melinte I. V. (V : 111*, 112*, 129*), Locker I. I. (V : 129, 143).

Clasa VII-a : Rosenberg I. (VII : 78, VIII : 1*, 2*, 3*).

Liceul „Mihail Eminescu" Satu Mare.

Clasa V-a : Gorschi A. (V : 104*, 105*, 107, 108*, 117).

Clasa VI-a : Filip I. G. (VI : 97, 105), Iordan I. (VI : 93, 97*, 103, 104*, 105*, 106*, 118, 119), Lazlo M. (VI : 93, 97, 115, 106), Nagy F. C. (VI : 97, 105).

Liceul „Durostor" Silistra.

Clasa V-a : Vartolomeu H. (V : 104).

Liceul „Enăchiţă Văcărescu" Târgovişte.

Clasa IV-a : Blaier I. P. (IV : 118).

Clasa VII-a : Ion M. I. (VII : 1*, 2*, 3*). Nicolae C. (VIII : 1*, 2*, 3*), Ştefănescu A. (VIII : 1*, 21*).

Clasa VIII-a : Ionescu N. (VIII : 16), Logofătu C. (VIII : 1*, 16), Spirescu V. (VIII : 1*, 2*, 16).

Liceul militar „N. Filipescu“ M-rea Dealu Târgoviște.

Clasa II-a: Crăciunescu I. M. (IV: 95*, 96*, 97*, V: 110*, 112*, 113*, 115*, 116*, 117*, 120*, 121*, 122*, 123*, 124*, VI: 104*, 106*, 107*, VII: 97*, 102*, VIII: 11*, 15*).

Clasa V-a: Berbeciu V. C. (V: 104*, 105*, 106*, 107*. 108, VI: 97, VIII: 6, Florescu L. V. (V: 122*, 124*, 126*, 127*, VI: 115*, 118*, 119*, VII: 100, VIII: 11, 28, 29, 30), Manolescu P. N. (V: 105*, 106*, 110*, 113*, 114*, 115*, VI: 93*, 97), Popescu S. (V: 106*, 110*, 114*, 115*), Postelnicescu M. S. (V: 104*, 105*, 106*, 107*, 110*, 113*, 114*), Protopopescu M. (V: 104*, 105*, 106*, 107, 108*, VI: 97), Rădulescu O. (V: 101*, 104*, 105*, 106*, 107*, 108, 110*, 113*, 114*, 115*, 116*, 117*, VI: 93*, 97*, 103*, 104*, 105*, 106*, VII: 79*, 80, 84, VIII: 6), Vlădoianu R. G. (V: 105*, 106*, 107*, 108, 110*, VI: 97*).

Clasa VI-a: Nicolau B. L. (VI: 101*), Negulescu D. St. (VI: 109 110, 111).

Clasa VII-a: Atanasescu C. R. (VII: 100, VIII: 6, 11), Cercel C. D., (VIII: 6), Marinescu M. E. (VII: 79*, 80*, VIII:6*), Mușat G. (VII: 100*, VIII: 6, 11, 16), Mazilescu C. (VIII: 6), Nicolescu S. G. (VIII: 6, 11, 28, 29*, 30*), Niculescu F. G. (VIII: 6), Pătru G. I. (VII: 79, VIII: 6, 11), Petcu G. (VIII: 6).

Liceul militar „Mihai Viteazu“ Târgu Mureș.

Clasa IV-a: Alexandrescu M. (IV: 80*, 81*), Anghelescu A. T. (IV: 84*), Ionescu N. I. (IV: 78*, 80*), Măgeanu I. N. (IV: 84*), Militaru A. (IV: 84*), Negulescu V. (IV: 84*), Rădulescu C. T. (IV: 84*), Stănescu F. D. (IV: 84), Țepeluș M. S. (IV: 84*).

Clasa V-a: Bejenaru G. V. (V: 104*, 105*, 106*, 110*, 129, VII: 97, VIII: 5*), Dumitriu A. P. (V: 106*), Iacob St. (V: 104*, 129), Săndulescu S. C. (V: 114*), Săndulescu I. (V: 129, VI: 94 VIII: 5), Stoian V. M. (VI: 97*), Tătaru N. N. (V: 105*, 108*, 110*, 113*, 114*, 115*, 121, 129, VI: 100*, VIII: 5*).

Clasa VI-a: Andronache V. (VI: 101*), Bădescu F. I. (VI: 96, 99, 110, 111, VIII: 16), Boborodea I. I. (VI: 93), Hortopan Gr. (VI: 93), Hurezeanu E. C. (VI: 99), Mosora N. N. (VI: 93, 97, 99), Matei D. V. (VI: 93), Sechel M. (VI: 93, 97*), Stoina T. (VI: 100*, 101).

Clasa VII-a: Stoian S. I. (VII: 79*, 80).

Clasa VIII-a: Bâdin A. V. (VIII: 11).

Liceul „Ștefan cel Mare“ Tighina.

Clasa VII-a; Țiralis D. (VII: 78*, VIII: 1*, 2*, 3*, 5*).

Liceul „C. Diaconovici Loga“ Timișoara.

Clasa IV-a: Roșca A. (IV: 78, 79, 80), Potoceanu G. (IV: 80*, 81*), Troceanu M. G. (IV: 80*, 81*), Vasilescu Stabu A. M. (IV: 78*, 79*, 80*, 81*, 82*, 83*, 84*, 85*, 86*, 87*, 88*, 89*, 90, 91*, 92*, 93*, 84*, 95*, V: 104*, 105*, 106*, 107*, 108*, 109*, 110*, 113*, 114*, 115, 116*, 117*, 118, 119,

VI: 93*, 97*, 99*, 101*, 102*, 103*, 104*, 105*, 106*, 109*, 110*, 111*, 112, 113*, 114*, VII: 78*, 84*, 87*, 88*, 90*, 91*, 94*, 96, VIII: 1*, 5*, 13*, 17, 21*, 22*, 23*, 24*).

Clasa V-a: Evuțeanu S. G. (V: 101, 102*, 105*, 106*), Nicolau L. M. (V: 101, 102, 111*, 112, 118, 119, 122, 129, 142, 143), Roholich M. A. (V: 129), Stavrescu Gr. (V: 101, 112*)

Clasa VI-a: Candelmanu L. D. (VI: 94), Morariu O. T. (VI: 104, 105), Nicolau M. L. (VI: 111).

Clasa VII-a: Kornis E. (VII: 97, 100, VIII: 8, 11, 13*).

Liceul „Principele Carol" Tulcea.

Clasa IV-a: Mașca I. T. (IV: 78*, 79*, 80*).

Liceul „Traian" Turnu Severin.

Clasa IV-a: Scurtu G. P. (IV: 78*, 79, 80*, 99, 100*, 102, VI: 94),

Clasa V-a: Coifan V, (V: 112*, 129), Mitea C. M. (V: 111*, 112, 129), Motâlcă E. (V: 101).

Clasa VI-a: Tilică C. S, (VI: 94, 95, 96, 110, 111).

Clasa VII-a: Blujdescu G. (VII: 97).

Elevi particulari, lic. „C. Loga" Timișoara.

Clasa VII-a: Silviu P (VIII: 1*, 2*),

Fără indicație de școală și clasă.

Bazac A. (VII: 97), Radovici N. (VIII: 1*, 2*), Tilică S. (VII: 97).

EXERCIȚII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 120.* Să se verifice identitatea:

$$\left(\frac{x}{c}+ab\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{x}{a}+bc\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{x}{b}+ac\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\equiv 0.$$

C. I. B.

IV. 121. Să se verifice identitatea:

$$2\left[(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)-(aa_1+bb_1)^2+1\right]$$
$$=(ab_1-a_1b-1)^2+(ab_1-a_1b+1)^2.$$

N. M.

IV. 122. Să se stabilească identitățile:

$$[(mm' - nn')^2 + (mn' + nm')^2](u^2 + v^2)$$
$$= [(mu + nv)^2 + (mv - nu)^2](m'^2 + n'^2)$$
$$= (m^2 + n^2)(m'^2 + n'^2)(u^2 + v^2).$$

N. M.

IV. 123. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b+1}\right)\left(\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c+1}\right)\left(\frac{1}{c-1}+\frac{1}{a+1}\right)}{\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b-1}\right)\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c-1}\right)\left(\frac{1}{c+1}+\frac{1}{a-1}\right)} = 1.$$

C. I. B.

IV. 124. Să se calculeze:

$$[(x+a)^2 + (x-a)^2]^3 - [(x+a)^3 + (x-a)^3]^2.$$

C. I. B.

IV. 125. Planele P și Q fac un unghiu de 60^0; de câte ori este mai mare segmentul de dreaptă din planul P, decât proiecția lui ortogonală în planul Q?

N. M.

IV. 126. Să se rezolve ecuațiunea:

$$x\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{c} = x\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{b}.$$

C. I. B.

IV. 127. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\left(abx+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)+\left(bcx+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)$$
$$+\left(acx+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right) = 0.$$

C. I. B.

IV. 128. Să se rezolve ecuațiunea:

$$b(b-a)x+bc(c-b)+ca(x-c)=(a-b)(b-c)(c-a).$$

Să se verifice soluția găsită și să se deducă identitatea:

$$ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c)=(a-b)(b-c)(c-a).$$

N. B.

IV. 129. Se iau două puncte fixe în spațiu A și B. Să se găsească locul punctelor M din spațiu, astfel ca:

$$\overline{MA}^2-\overline{MB}^2=a^2,$$

unde a este o lungime dată. O. N. Ț.

IV. 130. Fie piramida VABC. Din punctul M al muchei $\overline{VC}$ se duce MN paralelă cu VB, din punctul N al lui BC se duce NP paralelă cu CA, din punctul P al muchei AB se duce PR paralelă cu BC și în fine, din punctul R al muchei AC se duce o paralelă RS la muchia VC. Să se arate:

a) că dreptele VB și RS nu sunt în același plan;

b) că dreptele MP și NS sunt concurente.

O. N. Ț.

Clasa V-a. *Exerc. 144.* Să se calculeze produsul:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

N. B.

V. 145. Să se verifice identitatea:

$$[(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)-(aa_1+bb_1)^2+1][(a^2+c^2)(a_1^2+e_1^2)-(aa_1+cc_1)^2+1]$$
$$=[(a^2+bc)(a_1^2+b_1c_1)-(aa_1+b_1c)(aa_1+bc_1)-1]^2+[a(b_1+c_1)-a_1(b+c)]^2.$$

N. M.

V. 146. Se dă ecuațiunea:

$$x^2+px+q=0.$$

Să se formeze ecuațiunea care admite rădăcinile:

$$x'+p+q;\ x''+p+q,$$

x' și x'' fiind rădăcinile ecuațiunii date. C. I. B.

V. 147. Să se rezolve ecuația:

$$(x^2 + ax - b)(x^2 + ax + b) = \frac{a^4}{16} - b^2.$$

C. I. B.

V. 148. Fie x' și x'' rădăcinile ecuației:

$$x^2 + px + q = 0,$$

și y', y'' rădăcinile ecuației:

$$y^2 + x'y + x'' = 0.$$

Să se arate că:

$$\frac{1}{y' + y''} - \frac{1}{y'y''} = \frac{p}{q}.$$

C. I. B.

V. 149. Se dau ecuațiunile:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$y^2 + (p - 2)y + q - p + 1 = 0.$$

Să se arate că:

$$\frac{x'}{y'} + \frac{x''}{y''} = \frac{2q - p}{q - p + 1}.$$

x', x'', y', y'' fiind rădăcinile ecuațiilor.

C. I. B.

V. 150. Se dau ecuațiile:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$y^2 + ry + q = 0$$

având rădăcinile respectiv x', x'' și y', y''. Să se stabilească relația:

$$(x' + y')(x' - y') + (x'' + y'')(x'' - y'')$$
$$= (x' + x'' + y' + y'')(x' + x'' - y' - y'').$$

C. I. B.

V. 151. Să se arate că între laturile și înălțimile unui triunghiu oarecare există relația:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \left(\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c}\right)\left(\frac{h_a}{a} + \frac{h_b}{b} + \frac{h_c}{c}\right)$$

Gr. Z.

V. 152. In triunghiul ABC medianele BB' şi CC' sunt perpendiculare. Dacă vârfurile B şi C sunt fixe, să se găsească locul geometric al vârfului A.

N. B.

V. 153. Să se construiască un triunghiu dreptunghiu cunoscând înălţimea şi suma catetelor.

GH. B.

V. 154 Să se demonstreze că dacă într'un triunghiu ABC se ia simetrica laturei AC faţă de bisectoarea interioară a unghiului B şi simetrica aceleeaşi laturi AC faţă de bisectoarea exterioară a unghiului B, se obţin două drepte paralele.

GH B.

V. 155. Pe două axe perpendiculare în O, se ia punctele P şi Q: se poartă pe OP, lungimile $\overline{OR} = \overline{OS} = \overline{OQ}$ (R în spre P); perpendiculara în Q pe PQ, taie perpendiculara în R pe OP, în T; PT taie pe OQ în U. Segmentul $\overline{OU}$ este a patra proporţională între $\overline{PR}$, $\overline{PS}$, $\overline{PO}$.

N. M.

Clasa VI-a. *Exerc. 132.* Pentru ce valori ale lui m, suma:

$$m + tg^2a + \text{cotg}^2a$$

este egală cu: $4\cos^2 2a$?

GH. B.

VI. 133. Să se verifice identitatea:

$$\frac{tg\,3a}{tga} - 1 = \frac{2}{1 - 4\sin^2 a}.$$

C. I. B.

VI. 134. Să se stabilească relaţia:

$$\frac{tg3a - tga}{tg3a + tga} = \frac{1}{2\cos 2a}$$

unde $a \neq \frac{k\pi}{4}$.

C. I. B.

VI 135. Să se arate că în orice triunghiu dreptunghic:

$$tg2B = \frac{2bc}{\pm\sqrt{a^4 - 4b^2c^2}}.$$

Semnul radicalului fiind + dacă $B < 45^0$ şi — dacă $B > 45^0$.

C. I. B.

VI. 136. Să se arate că într'un triunghiu dreptunghiu există relaţia:

$$\frac{tg3B - tgB}{tgB} = \frac{2a^2}{c^2 - 3b^2}$$

C. I. B.

VI. 137. In orice triunghiu dreptunghiu există relaţia:

$$tg(4k+2)B + tg(4k+2)C = 0.$$

C. I. B.

VI. 138. Să se rezolve ecuaţia:

$$2(\cos^3 x + 1) = 3\sin^2 x.$$

N. M.

VI. 139. Un segment L de dreaptă din planul P, se proiectează în planul Q în L' şi din L' se proiectează din nou în L", în planul P. Lungimea L' este medie proporţională între lungimea segmentelor L şi L".

N. M.

VI. 140. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x+b} = \sqrt[3]{a-b}.$$

C. I. B.

VI. 141. Să se spună dacă ecuaţiunea:

$$\sin x + \cos x + tgx + \operatorname{cotg} x = 0$$

are soluţiuni.

O. N. Ţ.

VI. 142. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$\sin x + \cos x - \sec x - \operatorname{cosec} x = 0.$$

O. N. Ţ.

Clasa VII-a. *Exerc. 122.* Se consideră funcțiunea $y = Lx^n$. Fie y' derivata lui y; y'' derivata lui y'; y''' derivata lui y''; $y^{(p)}$ derivata lui $y^{(p-1)}$. Să se arate că:

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{1}{y'} + \frac{1}{y''} + \frac{1}{y'''} + \ldots + \frac{1}{y^{(n)}} \right) = \frac{x}{e^x}.$$

N. B.

VII. 123. Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} a+2c & a+c & a+b \\ a & a-c & c \\ a & -b & b-a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a-c & c \\ a & -b & b-a \end{vmatrix}$$

N. B.

VII. 124. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[5]{x+a} - \sqrt[5]{x+b} = \sqrt[5]{a-b}$$

C. I. B.

VII. 125. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x+7a} - 2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{x+a} - \sqrt[5]{2a}}$$

C. I. B.

VII. 126. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt[3]{a^3x^3 + a^3x^2 + 1} - ax)$$

C. I. B.

VII. 127. In ce caz sistemul:

$$x \sin a + y \sin b = \sin c$$
$$x \cos a + y \cos b = \cos c$$
$$x + y = 1$$

este compatibil? In acest caz să se rezolve.

C. I. B.

VII. 128. Să se verifice, dacă sistemul:

$$\frac{x}{\operatorname{tg}^2 a} + \frac{y}{\operatorname{tg}^2 b} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{x}{\cos^2 a} + \frac{y}{\cos^2 b} = 1$$

$$x + y = \frac{1}{5}$$

este compatibil şi în caz afirmativ să se rezolve.

C. I. B.

VII. 129. Se dă funcţia:

$$y = \sqrt[3]{a^3x^3 + 3a^3x + 1}.$$

Să se arate că:

$$y^2 y' = a^3 (x^2 + 1).$$

C. I. B.

VII. 130. Fiind dată funcţiunea:

$$y = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

să se stabilească relaţiunea:

$$\frac{y}{y'} = \frac{x\,(a^2 - x^2)}{a^2}.$$

C. I. B.

VII. 131. Funcţia: $\arcsin u + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$, nu depinde de u.

N. M.

VII. 132. Să se studieze variaţiunea funcţiunii:

$$y = x^m + \frac{1}{x^m}$$

să se reprezinte această variaţiune.

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 46.* Să se demonstreze că ecuațiunea:

$$\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = 0$$

are două rădăcini egale și de semn contrar. GH. B.

VIII. 47. Să se rezolve ecuațiile:

$$x^3 - (\lambda + 1)x^2 + \lambda x = 0$$

$$x^3 + \mu x^2 - (2\mu + 1)x + \mu = 0,$$

ecuația a doua admițând rădăcinile primei, mărite cu același număr.
N. M.

VIII. 48. Să se verifice egalitatea:

$$\frac{(1 - \operatorname{tg}^2 2\theta + 2i \operatorname{tg} 2\theta)^5}{(1 - \operatorname{tg}^2 5\theta + 2i \operatorname{tg} 5\theta)^2} \equiv \frac{\cos^4 5\theta}{\cos^{10} 2\theta}.$$

C. I. B.

VIII. 49. Să se verifice egalitatea:

$$\frac{[1 - 3\operatorname{tg}^2 m\theta + i \operatorname{tg} m\theta \cdot (3 - \operatorname{tg}^2 m\theta)]^n}{[1 - 3\operatorname{tg}^2 n\theta + i \operatorname{tg} n\theta \cdot (3 - \operatorname{tg}^2 n\theta)]^m} = \frac{\cos^{3m} n\theta}{\cos^{3n} m\theta}.$$

C. I. B.

VIII. 50. Să se verifice egalitatea:

$$\frac{[1 - 3\operatorname{tg}^2 2\theta + i \operatorname{tg} 2\theta \cdot (3 - \operatorname{tg}^2 2\theta)]^5}{[1 - 3\operatorname{tg}^2 5\theta + i \operatorname{tg} 5\theta \cdot (3 - \operatorname{tg}^2 2\theta)]^2} = \frac{\cos^6 5\theta}{\cos^{15} 2\theta}.$$

C. I. B.

VIII. 51. Se consideră în plan dreptele:

$$(\lambda - a - 2c)x + (\lambda - a - c)y + (a + b - \lambda) = 0$$

$$ax + (a - c)y - c = 0$$

$$ax - by + a - b = 0.$$

Să se determine λ, așa fel ca dreptele să fie concurente.
N. B.

VIII. 52. Se consideră dreptele:

$$(b \quad c)\, x + by - c = 0$$

$$ax + (a - c)\, y - c = 0$$

$$ax - by + (a - b) = 0.$$

Să se arate că aceste drepte trec printr'un acelaş punct şi să se determine coordonatele acestui punct.

N. B

VIII. 53. Să se arate punctele:

$$A\,(a - r,\ b);\ B\left(a + \frac{r}{2},\ b + \frac{r\sqrt{3}}{2}\right);\ C\left(a + \frac{r\sqrt{3}}{2},\ b + \frac{r}{2}\right);$$

$$D\left(a - r\frac{\sqrt{3}}{2},\ b - \frac{r}{2}\right),$$

formează un trapez isoscel. N. B.

VIII. 54. Se consideră în plan punctele:

$$A\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -\sqrt{3}\right);\ B\left(0,\ -\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right);\ C\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$D\left(-\frac{\sqrt{3} + 3}{2},\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Să se arate că aceste puncte sunt vârfurile unui trapez isoscel şi că triunghiurile ADC şi DBC sunt dreptunghice.

N. B.

VIII. 55. Punctele:

$$A\left(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ B\left(-\sqrt{3} + \frac{3}{2},\ 0\right);$$

$$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right);\ D\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \sqrt{3},\ \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2}\right).$$

Se găsesc pe un cerc.

N. B.

VIII. 56. Punctele:

$$A\left(1-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$C\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}, 0\right); \quad D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right)$$

se găsesc pe un cerc. N. B.

VIII. 57. Punctele:

$$A\,(a+1, b); \quad B\left(a+\frac{\sqrt{3}}{2}, b+\frac{1}{2}\right);$$

$$C\left(a+\frac{1}{2}, b+\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad D\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}, b+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

se găsesc pe un cerc. N. B.

VIII. 58. Ce suprafață se poate observa dintr'un hidroavion ridicat la 2000 m. deasupra nivelului mării?

C. I. B.

VIII. 59. Distanța dela punctul de intersecție al laturilor neparalele până la centrul de greutate al unui trapez, este $\frac{2}{3}\,m\left(1+\frac{k^2}{1+k}\right)$, m fiind lungimea dreptei ce unește intersecția cu mijlocul bazei mari, iar k raportul subunitar al bazelor.

N. M.

Erată. La Ex. VIII: 21 se va ceti $-8x\,(x+1)^4$
în loc de $-8x\,(x+1^4)$.
La Ex. VIII: 22 se va ceti $+8x\,(x-1)^4$
în loc de $+8x\,(x-1^4)$.
La Ex. VIII: 24 se va ceti $+6x\,(x-1)^4$
în loc de $+6x\,(x-1^4)$.

Soluțiunile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului și se redactează după *„Instrucțiunile"* publicate în Nr. 1, pag. 24.

Drepturile de reproducere rezervate Societății *Gazeta Matematică*.

Dr. 6

BIBLIOTECA CENTRALĂ
A „ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL II. No. 6 — 1 MARTIE 1936

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa IV-a. *Exerc. 86. Să se construiască un triunghiu* ABC, *cunoscând raza cercului circumscris, lungimea bisectoarei* AA' *şi unghiul pe care-l face* BC *cu diametrul ce pleacă din* A *în cercul circumscris triunghiului.*

GH. B.

Presupun problema rezolvată şi fie ABC triunghiul căutat, D extremitatea diametrului AO şi H piciorul înălţimei AH. Din patrulaterul inscriptibil DBAC se deduce

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACH$$

şi cum ABD şi AHC sunt unghiuri drepte, rezultă că

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle HAC$$

deci AA' este bisectoarea unghiului DAH sau D'AH, unde D' este intersecţia lui AD cu BC. Fiindcă $\sphericalangle$ AD'H este dat, rezultă valoarea lui $\sphericalangle$ D'AH şi deci a jumătăţei sale $\sphericalangle$ D'AA'.

De aici urmează construcţia: Se construeşte un triunghiu AA'D' în care se cunoaşte AA', $\sphericalangle$ AD'A' şi $\sphericalangle$ D'AA'. Pe AD', dela A spre D', se ia lungimea AO egală cu raza dată. Cercul descris cu centrul în O şi raza AO taie pe A'D' în B şi C. Triunghiul ABC astfel construit, este triunghiul căutat.

IV. 87. Picioarele bisectoarelor unghiului A *al triunghiului* ABC *se proiectează în* A', A'' *pe diametrul* AO *al cercului circumscris triunghiului. Să se demonstreze că* A'A'' *este egală cu dublul înălţimei ce pleacă din* A.

GH. B.

Fie AA_1, AA_2, AH bisectoarele ce pleacă din A şi înălţimea. S'a demonstrat în exerciţiul 86 pentru clasa IV-a că AA_1 este bisectoara unghiului A'AH, rezultă că

$$AA' = AH.$$

La fel se arată că

$$AA'' = AH$$

de unde rezultă proprietatea enunţată.

Clasa V-a. *Exerc. 109. Să se construiască un triunghiu* ABC, *cunoscând unghiul pe care-l face* BC *cu diametrul* AO *al cercului său circumscris, distanţa între piciorul bisectoarei şi al înălţimei ce pleacă din* A *şi lungimea medianei* AM.

GH. B.

Fie A', H piciorul bisectoarei şi înălţimei ce pleacă din A. Conform exerciţiilor 86 şi 87 pentru clasa IV, unghiul A'AH este cunoscut. Deci construcţia următoare: Se construeşte triunghiul dreptunghic AHA' în care se cunoaşte cateta A'H şi unghiul A'AH, apoi din A ca centru cu AM ca rază se construeşte un cerc care taie pe BC în M şi M', care vor fi mijloacele laturei BC a triunghiului căutat. Perpendiculara în M pe A'H, taie simetrica lui AH faţă de AA' în O. Acesta este centrul cercului circumscris. Cercul cu centrul în O şi raza OA taie pe A'H în punctele B şi C căutate.

Problema poate avea 2, 1 sau 0 soluţiuni.

V. 121. Să se construiască un triunghiu ABC *cunoscând o latură şi ştiind că bisectoarea* AD *împarte triunghiul în două triunghiuri isoscele* ABD *şi* ADC.

GH. B.

Să examinăm diferitele cazuri în care triunghiurile ABD şi ADC pot fi isoscele şi să notăm cu α unghiul ADC.

Cazul 1°. AD = DB *cu* AD = AC. Rezultă

$$B = \frac{A}{2} \text{ şi } C = \alpha = B + \frac{A}{2} = A$$

$$\therefore \quad A + A + \frac{A}{2} = 180$$

$$\therefore \quad A = 72^0 \quad , \quad B = 36^0 \quad , \quad C = 72^0.$$

Cazul 2°. AD = DB *cu* AD = DC. Rezultă

$$B = \frac{A}{2} \quad , \quad C = \frac{A}{2}$$

$$\therefore \quad A + B + C = A + \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = 180^0$$

$$\therefore \quad A = 90^0 \quad , \quad B = 45^0 \quad , \quad C = 45^0.$$

Cazul 3°. AD = DB *cu* AC = DC. Imposibil căci din a doua condiţie rezultă $\alpha = \frac{A}{2}$ care arată că BC || AB.

Cazul 4°. AB = BD. Imposibilitate ca la 3°.

Cazul 5°. AB = AD *cu* AD = AC. Conduce la

$$B = C = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{4}$$

dar atunci, triunghiul ABC fiind isoscel, rezultă imposibilitatea

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = B = C.$$

Cazul 6°. AB = AD *cu* AD = DC. Rezultă

$$B = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{4} \quad , \quad C = \frac{A}{2}$$

$$\therefore \quad A = 72^0 \quad , \quad B = 36^0 \quad , \quad C = 72^0$$

adică tot una cu 2°.

Cazul 7°. AB = AD *cu* AC = DC, Imposibil ca la 3°.

Problema este deci posibilă numai în cazurile 1° şi 2°. Proprietăţile fiind reciproce rezultă că construcţia cerută în enunţ se reduce la cazul când se cunoaşte o latură şi unghiurile.

Clasa VI-a. *Exerc. 98. Să se determine pentru diferitele valori ale lui* m, *natura rădăcinilor ecuației :*

$$2mx^4 - (3m + 2)\,x^3 - (m - 5)\,x^2 - (3m + 2)\,x + 2m = 0.$$

G. D. S.

Impărțim cu x^2 și punem :

$$x + \frac{1}{x} = y.$$

Obținem :

$$2my^2 - (3m + 2)\,y - 5\,(m - 1) = 0.$$

Rădăcinile sunt :

$$y_1 = \frac{5}{2} \quad ; \quad y_2 = \frac{1 - m}{m}.$$

Deci :

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \text{și} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{1 - m}{m}.$$

Prima ecuație ne duce la rădăcinile :

$$x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Ecuația a doua este :

$$mx^2 + (m - 1)\,x + m = 0.$$

Realizantul este :

$$R = -3m^2 - 2m + 1.$$

Suma rădăcinilor :

$$S = -\frac{m - 1}{m}.$$

Produsul rădăcinilor :

$$P = 1.$$

Studiind semnul lui R și S găsim :

1°. Pentru $m < -1$ și $m > \frac{1}{3}$ x_3, x_4 sunt imaginare.

2°. Pentru $-1 < m < 0$ x_3, x_4 sunt reale și negative.

3°. Pentru $0 < m < \frac{1}{3}$ x_3, x_4 sunt reale și pozitive.

VI. 102. Se dă diametrul fix AB *în cercul* O *şi fie* M *un punct mobil în planul său. Dreapta* BM *întâlneşte a doua oară cercul* O *în* N. *Fie* M' *simetricul lui* M *faţă de* N *şi* C *intersecţia lui* AN *cu perpendiculara scoborîtă din* M *pe* AB. *Să se demonstreze că patrulaterul* AM'CB *este inscriptibil oricare ar fi poziţia lui* M [1]).

GH. B.

Fie D şi E intersecţiile (AB, MC) şi (AM, CB). Unghiurile ANB şi ADM fiind drepte, punctul B este ortocentrul triunghiului AMC şi deci patrulaterul CNEM este inscriptibil, de unde

$$(1) \qquad \sphericalangle NMA = \sphericalangle BCN.$$

Apoi N fiind mijlocul lui MM' şi piciorul perpendicularei AN pe MM', triunghiul MAM' este isoscel, deci

$$\sphericalangle NMA = \sphericalangle AM'B$$

care cu (1) rezolvă problema.

Clasa VII-a. *Exerc. 85. Un trunchiu de con este circumscris unei sfere.*

1°. *Să se arate că raportul suprafeţelor acestor corpuri este egal cu raportul volumelor lor.*

(Pentru trunchiul de con se va socoti suprafaţa totală).

G. D. S.

1°. Să notăm cu G generatoarea, R, r razele bazelor trunchiului de con, ρ raza sferei, S_1, S_2 suprafeţele celor două corpuri, V_1, V_2 volumele lor.

Se pot stabili imediat următoarele relaţii:

$$G = R + r \quad \text{şi} \quad \rho^2 = Rr.$$

---

1) S'a rectificat enunţul pentru a corespunde dezvoltării ce se poate da acestei reviste. Corespondenţii care vor rezolva exerciţiul 102 aşa cum a fost enunţat la pag. 20, pot trimite soluţii spre publicare la *Gazeta Matematică*.

Vom avea :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi (R + r) G + \pi R^2 + \pi r^2}{4\pi\rho^2} = \frac{R^2 + r^2 + Rr}{2Rr}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi}{3} 2\rho (R^2 + r^2 + Rr)}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} = \frac{R^2 + r^2 + Rr}{2Rr} = \frac{S_1}{S_2}$$

Q. E. D.

2°. Să punem :

$$\frac{R^2 + r^2 + Rr}{2Rr} = m \quad \therefore \quad \left(\frac{R}{r}\right)^2 + (1 - 2m)\frac{R}{r} + 1 = 0.$$

Pentru ca rădăcinile acestei ecuații în $\frac{R}{r}$ să fie reale și pozitive, trebue ca realizantul și suma rădăcinilor să fie pozitive. Deci :

$$4m^2 - 4m - 3 > 0 \quad \text{și} \quad 2m - 1 > 0,$$

din care rezultă $m > \frac{3}{2}$.

Raportul poate varia dela $\frac{3}{2}$ la $+\infty$.

VII. 101. Să se calculeze expresiunea :

$$E = 2[2[2(2 + 1) + 1] + 1] + 1] - 16.$$

Să se generalizeze :

I. L.

Soluție. Expresia dată se mai poate scrie :

$$E = 2[2(2^2 + 2 + 1) + 1] + 1 - 2^4$$

$$\therefore \quad E = 2(2^3 + 2^2 + 2 + 1) + 1 - 2^4$$

$$\therefore \quad E = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 - 2^4$$

$$\therefore \quad E = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

aceasta este o progresie geometrică cu rația 2.

$$F = 1\,\frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 15.$$

Generalizare. Trebue să se calculeze expresia :

$$E = a\{\ldots a\{a[a(a+1)+1]+1\}+1\ldots\}+1-a^n$$

în care a şi 1 sunt repetaţi de n ori.

Prin procedeul arătat obţinem:

$$E = a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1 - a^n$$

$$E = a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1 \; ; \; E = \frac{a^n - 1}{a - 1} \text{ când } a > 1$$

sau

$$E = \frac{1 - a^n}{1 - a} \text{ când } 0 < a < 1.$$

Clasa VIII-a. *Exerc. 4. Se dă polinomul:*

$$P(x) = (n-1)x^{n+1} - (n+1)x^n + (n+1)x - n + 1.$$

1°. *Să se arate că acest polinom se împarte cu* $(x-1)^3$ *şi să se afle câtul.*

2°. *Să se găsească:*

$$\lim_{x \to 1} \frac{P(x)}{(x-1)^3}.$$

G. D. S.

Calculăm prima şi a doua derivată a lui $P(x)$:

$$P'(x) = (n^2 - 1)x^n - (n+1)nx^{n-1} + (n+1)$$

$$P''(x) = (n^2 - 1)nx^{n-1} - (n+1)n(n-1)x^{n-2}.$$

Se verifică imediat că

$$P(1) = P'(1) = P''(1) = 0,$$

deci polinomul se împarte cu $(x-1)^3$. Câtul este:

$$Q(x) = (n-1)x^{n-2} + 2(n-2)x^{n-3} + 3(n-3)x^{n-4} + \ldots + (n-1).$$

2°. Aplicând de trei ori regula lui HÔPITAL găsim:

$$\lim_{x \to 1} \frac{P(x)}{(x-1)^3} = C_{n+1}^3 .$$

Rezultă:

$$Q(1) = C_{n+1}^3 .$$

VIII. 12. Se dă funcţiunea:

$$y = L(\sin x + \cos x)^{(\sin x + \cos x)}.$$

Să se stabilească relaţia:

$$x = \tfrac{1}{2} \arcsin\left[\frac{(y+y'')(y+y'' \pm \sqrt{16+(y+y'')^2})}{8}\right].$$

C. I. B.

$$y = (\sin x + \cos x) L(\sin x + \cos x)$$

$$y' = (\cos x - \sin x) L(\sin x + \cos x) + \cos x - \sin x$$

$$y'' = -(\sin x + \cos x) L(\sin x + \cos x) + \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\sin x + \cos x} - \sin x - \cos x$$

$$y'' + y = \frac{(\cos x - \sin x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} = \frac{-4 \sin x \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$(y+y'')^2 = \frac{16 \sin^2 x \cos^2 x}{1 + 2 \sin x \cos x} = \frac{4 \sin^2 2x}{1 + \sin x 2x}$$

sau

$$4 \sin^2 2x - (y+y'')^2 \sin 2x - (y+y'')^2 = 0.$$

Deci

$$\sin 2x = \frac{(y+y'')^2 \pm \sqrt{(y+y'')^4 + 16(y+y'')^2}}{8} .$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

Subiectele date pentru lucrarea scrisă de matematici la examenul de admitere în cursul superior al liceelor militare, din sesiunea Iunie 1935

Liceul militar „G-l divizie Gh. Makarovici" Iaşi.

Să se calculeze volumul şi suprafaţa laterală a unui con, ştiind că înălţimea conului este mai mare decât diametrul bazei cu 1 m., iar o pătrime din înălţime este mai mică decât raza bazei cu 1 dm.

Liceul militar „D. A. Sturdza" Craiova.

1. — Suma a două numere este 210; raportul lor este 30/40;

Să se afle aceste două numere, rezolvând sistemul prin una din cele trei metode învăţate. Apoi să se caute a se rezolva sistemul printr'o metodă mai simplă, bazată pe proprietăţile proporţiilor.

2. — Cele două valori găsite să fie:

a) Cea mai mică, raza cercului unui con drept şi

b) Cea mai mare, înălţimea, exprimate în dm.

Să se afle suprafaţa laterală a conului.

Liceul militar „G-l divizie Gh. Makarovici" Iaşi.

Se dau bazele unui trapez respectiv de 25 m. şi de 15 m., iar înălţimea de 10 m. Se prelungesc laturile neparalele până la întâlnirea lor. Se cere să se afle înălţimea triunghiurilor astfel formate. Să se afle deasemenea distanţele punctului de întâlnire al diagonalelor trapezului la cele două baze ale trapezului.

Un comerciant a ţinut o întreprindere 4 ani. In primul an capitalul său a trecut cu 2/7 din el, în cel de al doilea an a scăzut cu 1/8 din ce devenise după anul I; în timpul anului III a crescut cu 6%, iar în cel de al IV-lea an câştigul a fost egal cu totalul câştigurilor din anii precedenţi.

Averea comerciantului s'a ridicat astfel la urmă la 523.600 lei. Cu ce sumă a pornit el în această afacere?

Până la 10 Februarie s'au primit soluţiuni bune pentru exerciţiile publicate în numerele 2, 3, 4, 5 dela [1]):

Şcoala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu" Bucureşti.

Clasa V-a: Dumitrescu Jeana (V: 110, 115*, 124, 125, 128), Ionescu Florica (V: 110, 115*, 124, 125, 128), Nicolau A. Elena (V: 93, 114, 115*, 124, 125), Popescu Irina (V: 115*, 124, 125), Stoica N. Maria (V: 110*, 114*), Teodorescu D. Elisabeta (V: 114, 124*, 125, 128).

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine. Se adaugă şi rezolvitorii exerciţiilor din Nr. 1 cari au trimis soluţiuni la timp, dar n'au fost menţionaţi din cauza abundenţei materialului.

Clasa VI-a: Bendorf A. Alexandra (VI: 130, 138), Lupu N. Maria (VI: 106, 107*, 118*, 119, 120*, VII: 103), Nasta A. Amelia Gabriela (VI: 93*, 97*, 101*, 104*, 107*, 120*, VII: 97, VIII: 15), Nedelcu Marcela (VI: 103, 104*, 105*, 106, 107, 118*, 120*), Romaşcan G. Georgeta (VI: 101*, 102, 108, 119, 130, VII: 97, 98*, 99*, VIII: 11, 13*), Stănescu N. Virginia (VI: 130), Trofin I. Aurora (VI: 93, 97, 99, 103, 104*, 105*, 106, 108, 120*, VII: 77*).

Şcoala de fete „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa IV-a: Cohn Lydia (IV: 98*, 99*, 100*, 102, V: 124*, VIII: 2), Dan Aurora (V: 114), Negreanu Iosefina (IV: 98*, 99*, 100*, 101*, 102*, 104*, 105*), Paladescu Cristina (IV: 110*, 111*, 112*, 113*, 114*, 115*, 116*, V: 113*, 114*, 115*, 116*, VI: 104*, 106*), Şerbănescu P. Viorica Madelina (IV: 99*, 100*, 101*, 108*, 110*, 111*, 112*, 113*, 116*).

Clasa VI-a: Iacoby D. Marcela (VI: 113*, 118*, 119), Nichifor G. Antoaneta (VI: 118*, 119, 150*), Odobescu M. Simona (VI: 104*, 107*, 118*).

Clasa VII-a: Tănăsescu Venera (VII: 77*, 79*, 80*, 81*, 82*, 83*, 84*, 85*, 86*).

Liceul de fete „Domniţa Ileana" Bucureşti.

Clasa V-a: Bădulescu V. Viorica (V: 110, 114). Crăciun A. Aurelia (V: 101, 110, 111, 112, 113, 114*, 124*, 125*, 128, VI: 118), Floricică Elena (V: 120), Goldenberg I. Henriette (V: 111, 112, 113*, 114*, 124*, 125*, 128*, VI: 118*), Ionescu C. Mariana (V: 110, 111, 112*, 113, 114*, 124*, VI: 105*, 106*).

Institutul de fete „Moteanu" Bucureşti.

Clasa IV-a: Munroe M. Manuela (IV: 98*, 99*, 100*, 101*, 102*, 105*, V: 124*, 125*), Şerbănescu Georgetta (IV: 100*, 102*), Tipărescu N. Cornelia (IV: 78, 79, 80*, 81*, 100*).

Clasa VII-a: Iliescu A. Constanţa (VII: 87*, 88*, 90*, 91*, VIII: 11*, 16).

Externatul Ortodox „Zoe Romniceanu" Bucureşti.

Clasa IV-a: Oancea M. Ileana (IV: 79, 91, 99).

Clasa VII-a: Lazarovici Rozica (VII: 98, 99, 100, 107*, 108*, 110*, 115*, 121, VIII: 6, 15*), Rociu I. Margareta (VII: 98, 99*, 100*, 102, 103, 107*, 108*, 110, 115, 121, VIII: 6).

Institutul de fete Ortodox internat Bucureşti.

Clasa IV-a: Bobeş P. Mariana (IV: 118).

Clasa V-a: Negulescu A. Marie-Louise (V: 110*, 111*, 112, 113*, 114*), Otetelişanu E. Ruxanda (V: 110*, 111*, 112*, 113*, 114*).

Institutul de fete „Bolintineanu" Bucureşti.

Clasa IV-a: Diaconescu P. Florica (IV: 98, 101, 102), Dingu D. Theodora (IV: 99, 100, 101, 102).

Clasa V-a: Vasilescu I. Maria (V: 111, 112, 113, 124*, 125*).

Liceul de fete „Carmen Sylva“ București.

Clasa VI-a: Birtulescu G. Laura (VI: 120, VII: 97).
Clasa VII-a: Petrov E. Elena (VII: 97, 110).

Liceul de fete „Iulia Hașdeu“ București.

Clasa VIII-a: Stratilescu P. Victoria (VIII: 6*).

Liceul de fete „Dr. C. Angelescu“ Buzău.

Clasa V-a: Ionescu Maria (V: 124*, 125*).
Clasa VIII-: Ionescu G. Filoftéia (VIII: 21*, 23*, 24*, 31*), Vasiliu G. Elisabeta (VIII: 11, 16, 21, 23).

Liceul de fete Caracal.

Clasa VI-a: Musceleanu Ileana (VI: 98, 103*, 104*, 105*, 106*, 107, 118, 119*, 120*, VII: 77, 97, VIII: 11*, 13*, 21, 23).

Liceul de fete „Ecaterina Urziceanu“ Craiova.

Clasa VII-a: Vlădescu Yvonne (VIII: 21).

Liceul „Mihail Kogălniceanu“ Galați.

Clasa VIII-a: Burdescu I. Maria (VIII: 21*, 22*, 23*, 29*, 30*. 31*), Finchelstein M. Cornelia (VIII: 21*, 23*, 24*, 29*, 30*).

Liceul de fete „Oltea Doamna“ Iași.

Clasa VI-a: Stoicescu G. Cristineta (VI: 106*),

Liceul de fete „Elina Matei Basarab“ Râmnicul Sărat.

Clasa V-a: Alexandrescu E. Polixenia (V: 104, 106*, 114).

Liceul maicelor din Satu-Mare.

Clasa IV-a: Seleș Lucia (IV: 78, 79*, 80, 81).

Școala Normală de fete „Andrei Șaguna“ Sibiu.

Clasa V-a: Ivan Maria (V: 113, 114*, 124, 125*, 126).

Liceul de fete „Carabella“ Târgoviște.

Alasa IV-a: Diaconescu I. Maria (IV: 79, 80), Dumitrescu A. Elena (IV: 79, 80, 100), Neagoe N. Cezarina (IV: 79), Popescu A. Cornelia (IV: 80, 98, 100), Rătescu C. Cornelia (IV: 79, 80), Șerban C. Maria (IV: 79, 80, 81, 84), Spălățeanu I. Stela (IV: 78*, 79, 80*, 99, 100, 101, 104).

Liceul de fete „Carmen Sylva“ Timişoara.

Clasa IV-a: Checian E. Ana (IV: 78*, 79, 80*, 99*, 100, 101), Domankos O. Erica (IV: 118)..

Clasa VII-a: Guttmann A. Paraschiva (VII: 110), Petrov E. Elena (VII: 111), Spither L. Klăria (VII: 110).

Liceul de fete „Principesa Elena“ Turnu Severin.

Clasa V-a: Moştornu Gr. Silvia (V: 104*, 105*, 106*, 107*), Petcoff T. Aida (V: 104, 105*, 111, 112, 113, 114, 115).

Clasa VI-a: Anghelescu C. Lucreţia (VI: 93, 97, 103, 104*).

Liceul „Gh. Lazăr“ Bucureşti.

Clasa V-a: Anghelescu V. E. (V: 110*, 113*, 114*, 115*, 116*, 117*, 124*, 125*, 126*), Căţoiu St. St. (V: 114*, 115*, 116*, 117*, 120*, 121*, 122*, 123*, 124*, 125*, 127, 128, 132*, 136*, 142, 143, VI: 118), Tomescu V. Gr. (V: 142, 143), Serafim H. C. (V: 112, 113, 114).

Clasa VI-a: Drouhet Ed. Ed. (VI: 105*, 106, 107*, 118*, 119*, 120*), Munroe M. M. (VI: 103*, 104*, 105*, 106*, 107*, 108*), Popescu F. M. (VI: 93, 106, 106*, 107*, 116, VII: 91, 97), Segal B. (VI: 93, 97, VIII: 6, 15*).

Clasa VII-a: Begu I. St. (VII: 97, 98*, 99*, 100*. 102, 103, 197, 110*, VIII: 13*, 15*), Iordache I. C. (VII: 87*, 88*, 97, 98*, 99*, 100*, 107).

Clasa VIII-a: Segal S. E. (VIII: 6, 7*, 11, 13, 15*, 16, 17*).

Liceul „Spiru Haret“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Dailis I. A. (IV: 100, 101, 102, V: 110*, 111, 112, 115*), Şeibulescu C. (IV: 125).

Clasa V-a: Stănculescu M. (V: 107*, 113, 115*, 116*, 120*, 123*, 124).

Clasa VI-a: Chiriceanu M. (VI: 120), Stănculescu I. (VI: 93*, 103, 104*, 105, 106, 107*, 108*, 115*, 120, 122*).

Clasa VII-a: Anghelescu I. C. (VII: 98, 89, 100*, 102, 103), Druţu N. T. (VII: 79, 81, 87*, 88*, 90*, 91*, VIII: 11, 13, 15*, 16*), Nahmias M. G. (VII: 107*, 108*, 131), Teodoru M. (VIII: 102, 103, 121, 129*, 131).

Clasa VIII-a: Iotzu C. Al. (VIII: 11, 12*, 13*, 15*, 16*, 17*, 25*, 26*, 27*, 28*, 29*, 30*, 31*), Teodoreanu A. D. (VIII: 11, 13, 16*).

Liceul „Aurel Vlaicu“ Bucureşti.

Clasa V-a: Dimitriu St. G. (V: 111, 112, 113), Fulger L. T. (V: 105*, 110*, 112*, 114, 115), Georgescu N. C. (V: 122), Howath I. S. (V: 110*, 113*, 114*, 115*, 117*, 122, 123, 125*, 127, 139*, VI: 93*, 105, 118*), Stoicescu E. C. (V: 110*, 124*, 125*, 127, 128, 134, 139*, 143. VI: 118*, VIII: 21, 23).

Clasa VI-a: Cristea N. Ş. (VI: 106).

Clasa VII-a: Buzescu V. A. (VII: 97, 100*, 101*, 102, 103, 107*, 108*, 110*, 111*, 112*, 113, VIII: 26*).

Clasa VIII-a: Dumitriu St. T. (VIII: 15*, 16, 21 22, 24*), Marinescu S. S. (VIII: 11*, 13*, 15*, 16*, 21*, 24*).

Liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti.

Clasa IV-a: Can I. S. (IV: 120*, 123*).

Clasa V-a: Constantinescu C. (V: 124*, 125*, 127, 137*, 138, VII: 97, VIII: 41).

Clasa VI-a: Bally L. N. (VI: 105, 118), Struţeanu S. M. (VI: 105, 107, 118).

Clasa VII-a: Cristescu I. G. (VII: 98*, 99*, 102, 103, 108*, 109*, 110*, 113*, VII: 11, 15*), Paladi-Beiu E. (VII: 87*, 88*, 90, 91*, VIII: 25*).

Institutul „Schewitz-Thierrin" Bucureşti.

Clasa IV-a: Goldenberg N. E. (IV: 100*, 118).

Clasa V-a: Ghica N. P. (VI: 118, 138, VII: 97, 102, 103*).

Clasa VI-a: Slomneanu I. I. (VI: 115*, 116*, 118*, 119*, 120*, 122*, 130, 131, 138, VII: 97), Storfer R. VI: 115*, 118*), Theqdorescu I. N. (VI: 118*), Ulivi L. L. (VI: 115*, 116*, 118*, 138), Zamfirescu G. M. (VI: 105, 107*).

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa VI-a: Preciado I. T. (VI: 93, 102, 103, 104*, 105*, 107, 108*, 114*, 115*, 117, 118*, 119*, 120*, VII: 85, 86*, 97), Şaichin O. A. (VI: 103, 104, 105*, 106, 107, 108* 113*, 114*, 118*, 119*, VII: 100*, 107*, 108*, 110*, 112*, 113, VIII: 6, 13, 14*, 15*, 21*, 22*, 23*, 24*), Silberman T. (VI: 107).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa IV-a: Augustin M. M. (IV: 99*, V: 101*), Balász F. L. (VI: 84, 98), Craiu D. G. (IV: 78*, 99*, 100*, 101*, 105*), Lenart I. A. (IV: 100*, 101*, 123), Niculescu C. E. (IV: 78*, 80*, 99*, 100*, 101*, 102*, V: 124*), Teodoroff A. S. (IV: 126).

Clasa V-a: Geller L. M. (V: 107), Mazzetti L. F. (V: 104, 105, 106).

Clasa VI-a: Popescu N. A. Zorica (VI: 118*, 120*, VII: 102, 103).

Colegiul Naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa V-a: Giurescu I. R. (V: 110*, 115*, 117*, 124, 125*, 128*, VI 105, 106*, 118*, VII: 102, 103).

Liceul „Cantemir Vodă" Bucureşti.

Clasa VI-a: Capriel G. I. A. (VI: 93, 97, 98, 99).

Clasa VII-a: Georgescu N. N. (VII: 84*, 87*, 88*, 100*, 101, 102, 103, 107, 108, 110, 111, 115*, VIII: 8, 15).

Seminarul Pedagogic Universitar „Titu Maiorescu" Bucureşti.

Clasa V-a: Bodnărescu M. H. (V: 120*, 121*, 122*, 123*, 124*, 125*, 126*, 127*, 128*, VI: 118*, 119*, 120*, 122*, VII: 97, 102, 103, VIII: 26*).

Liceul „Gh. Şincai" Bucureşti.

Clasa V-a: Cetăţeanu G. S. (V: 111, 112, 113*, 114*, 115*, 124*, 125*, 126*, 128*, 137* 138*, 139*, VI: 104*).

Liceul „Mihail Eminescu" Bucureşti.

Clasa V-a: Niculescu C. (V: 137*).
Clasa VI-a: Bădescu V. V. (VI: 113*, 115*, 118*).

Liceul „Sf. Andrei" Bucureşti.

Clasa VI-a; Mateescu A. I. (VI: 104*, 105, 108*).
Clasa VIII-a: Bendorf A. G. (VIII: 28*, 29*, 30*, 43).

Liceul „Mareie Voevod Mihai" Bucureşti.

Clasa V-a: Schwarz N. I. (V: 138, 139*).

Liceul „Ion Creangă" Bălţi.

Clasa VII-a: Repetur D. S. (VII: 92*, 93*, 97, 98*, 99*, 121, VIII: 1*, 2*, 3*, 16, 41).

Liceul „Codreanu" Bârlad.

Clasa IV-a: Pavelescu V. D. (IV: 99, 100, 101, 102).
Clasa V-a: Galea S. C: (V: 104, 114, 124, 125).
Clasa VII-a: Bailcu I. E. (VII: 13), Edelstein L. (VIII: 6, 13), Spanache I. (VII: 97).

Liceul „Samuil Vulcan" Beiuş.

Clasa V-a: Ardeleanu V. A. (V: 111*, 112*, 113, 114, 115, 124, 125, 126, 127, 128, 137, 139, VI: 118, 120, VII: 97), Jidanu I. C. (V: 117*, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 136, 137*, 138, 139, 142, 143, VI: 118, 119, 120, VIII: 41), Moş Teodor T. (V: 104, 105, 106, 111*, 113, 114, 115, 124, 125, 137*, 139*, VI: 118), Todoran G. G. (V: 111*, 112*, 113, 115*, 128, 136, 137, VI: 118*).
Clasa VI-a: Hera V. I. (VI: 118*, 119, 120*), Killner G. (VI: 118*, 119, 120*), Văcariu A. (VI: 118*, 119, 120*, 130).
Clasa VII-a: Chirvai I. V. (VII: 87*, 88*, 92, 93, 97, 98, 99, 100, VIII: 11, 13. 15, 16). Hompola I. T. (VII: 90*, 97, 98, 99, 101, 102, 103, VIII: 13), Marica P. (VII: 86, 87*, 88*, 92, 93*, 97, 98*, 99*, 107, VIII: 13*).

Liceul „Sf. Vasile" Blaj.

Clasa VII-a. Hossu I. I. (VII: 79).

Liceul „Laurian" Botoşani.

Clasa VII-a: Botezatu C. T. (VII: 79*, 89*, 81*, 82*, 83*, 86, VIII: 6*, 7*), Gafencu A. N. (VIII: 11*, 13*, 15*, 27*, 28*, 29*, 30*, 31).

Şcoala Comercială Superioară Brăila.

Clasa I-a: Barbălată I. I. (IV: 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105), Burtea M. S. (IV: 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105), Bălănică S. S. (IV: 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105), Ciulav G. (IV: 104, 103), Chiriazi A. N, (IV: 78, 79, 80, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104), Dobsescu N. (IV: 105), Grünberg Z. (IV: 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105), Manole N. V. (IV: 98, 99, 100, 101, 102, 103, 144, 105), Mârza A. I. (IV: 98, 99, 100, 101, 102), Mironovici O. (IV: 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105), Oişer P. M. (IV: 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105), Popârlan Ş. (IV: 98, 99, 100, 101, 102), Popescu P. D. (IV: 98, 99, 100, 101, 102, 103), Pach H. L. (IV: 104, 105), Săncescu N. G. (IV: 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105), Stanef D. V. (IV: 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105), Theodorescu D. E. (IV: 98, 99, 100, 101), Vasilescu N. N. (IV: 98, 99, 100, 101, 102).

Liceul „Andrei Şaguna" Braşov.

Clasa IV-a: Anastasescu G. M. (IV: 78*, 80*, 100*), Boeriu N. I. (IV: 78*, 80*, 98*, 99*, 100*, 101*, 103*), Stoian E. (IV: 78*, 80*, 98*), Zăvoianu I. M. (IV: 78*, 79*, 80*, 98*).

Clasa V-a: Cojanu G. A. (V: 124, 125, 128, VII: 102, 103).

Liceul „I. Asan" Caracal.

Clasa VIII-a: Cârstea M. M. (VIII: 28, 29, 30), Clipea I. I. (VIII: 11, 13, 16, 26, 27, 28, 29, 30), Ilie D. I. (VIII: 11, 16, 26, 27, 28, 29, 30).

Liceul „Traian Doda" Caransebeş.

Clasa V-a: Florescu I. I. (V: 110, 117).

Liceul „V. Lucaci" Carei.

Clasa VIII-a: Popovici I. G. (VIII: 4*, 6, 7*, 8*, 9*, 11, 13, 15*, 26, 27, 28, 29, 30).

Liceul „Dinicu Golescu" Gâmpulung Muscel.

Clasa VIII-a: Popescu V. F. (VIII: 11, 15*, 31, 41).

Liceul „Dragoş Vodă" Câmpulung Bucovina.

Clasa V-a: Corlaţan S. L. (V: 125, 128, 139*, VI: 118 VIII: 41).

Particular Cetatea Albă.

Clasa V-a: Mănescu E. M. (V: 124*, 137*).

Liceul Ortodox de băieți Cernăuți.

Clasa VII-a: Cardos F. (VII: 87, 88, 90*' 91*, VIII: 13, 16), Mendel T. (VII; 87, 88, 90*, 91*, 98*, 99*, 100*, 102, 103, VIII: 13*, 15), Roland M. F. (VIII: 13).

Școala de conductori Arhitecți Cernăuți.

Anul I și II: Fain B. (V: 123), Galeriu V. (V: 136*, 142, 143, VI: 122*), Horvath T. (V: 124, 125), Moroz S. (V: 137*, VII: 110), Scutaru I. (V: 125, 128, 136, 137*, VI: 118*, 122), Șlamovitz (V: 136*, 137*, 139*, 142, 143, VII: 110).

Liceul militar Cernăuți.

Clasa IV-a: Rohr I. A. (IV: 101. 118), Tutoveanu A. (V: 101).

Clasa V-a: Bargăuanu M. (V: 111, Bretcanu C. (V: 111), Dombrovski I. (V: 111*, 112), Dumitrescu M. (V: 111), Dumitrescu C. P. (V: 101, 111*, 112), Metz M. (V: 111), Moțoc R. (V: 111, 112), Petrovici C. (V: 111, 112), Poalelungi V. (V: 112), Ștefănescu V. (V: 111, 112), Ștefănescu A. (V: 111).

Clasa VI-a: Apostol G. N. (VI: 130), Arhipescu M. C. (VI: 130), Bosinceanu D. G. (VI: 130), Floareș I. A. (VI: 130), Ionescu I. M. (VI: 130), Minaciu I. N. (VI: 130), Nedelcu V. N. (VI: 130, 131), Nicolaescu I. T. (VI: 130), Nistorescu V. D. (VI: 130), Romano V. M. (VI: 130), Tomescu G. T. (VI: 130).

Clasa VII-a: Apostol N. (VII: 114*), Băleanu E. (VII: 78*), Dumitrescu V. (VII: 114*), Lefter G. (VII: 90*), Lugojanu D, (VIII: 15, 16), Runceanu C. (VII: 78*, 91*, 107*, 108*, VIII: 16), Stoica P. I. (VII: 107*, 108*), Tanasiciuc C. (VII: 144*), Tomescu T. (VII: 114*), Vasilescu G. (VIII: 16*).

Clasa VIII-a: Cristea E. (VIII: 17, 21, 23*, 24*), Găbureanu M. (VIII: 31*), Maftei C. (VIII: 21*, 23*, 24*), Măgală G. (VIII: 23, 24*, 31), Mocanu N. V. (VIII: 14*, 17, 21, 31*), Radu E. A. (VIII: 21*, 23*, 31), Roman N. (VIII: 21*, 23*, 24), Tatoiu A. (VIII: 31), Zgârcea G. (VIII: 31*).

Liceul militar „Regele Ferdinand" Chișinău.

Clasa V-a: Burghelea C. (V: 142), Pântescu C. (V: 142, 143), Zolotovici I. D. (V: 142).

Clasa VII-a: Bazac D. (VII: 115*), Bulat M. (VII: 102, 103).

Clasa VIII-a: Milu I. N. (VIII: 1*, 2*, 15*).

Seminarul Pedagogic Universitar Cluj.

Clasa V-a: Borza A. A. (V. 104*, 107*, VI: 93, 97), Esca A. A. (V: 112, 114), Florian T. T. (V: 104*, 114, 124, 125, VI: 118*), Iacob A. M. (V: 104*, 107, 107, 114), Ionescu T. S. (V: 104, 112, 114, 123, VI: 118*), Kauntz I. I. (V: 124*, 125, 126, 127, 128, VI: 97, 118*), Văianu V. T. (V: 104*, 106, 107, 113, 114. 125).

Clasa VII-a: Gheorghescu G. C. (VII: 97, 107*, 198*).

Liceul „G. Barițiu“ Cluj.

Clasa VI-a: Nițescu C. G. (VI: 104*, 106, 107*, 113*, 114*, 116*, 117*, 118*, 119, 120*).

Clasa VII-a: Căpușan I. (VII: 100), Cosma I. A. (VII: 97, VIII: 13*. 14*, 15*, 16*), Dimitriu C. M. (VII: 97, VIII: 13, 16*), Klärmann B. F. (VII: 100), Popp A. A. (VII: 98*, 99*, 100).

Școala normală de învățători Cluj.

Clasa IV-a: Brie T. I. (IV: 99*, 100*, 101*, 102*), Câțu D. E. (IV: 99*, 100*, 101)*, Cuibrus I. (IV: 99*, 100*, 101*), Pop G. I. (IV: 99*, 100*, 101*), Șipoș G. (VI: 99*, 100*, 101*).

Clasa V-a: Gașpar A. (V: 124*, 139*), Ghivruțan T. (V: 124*, 139*).

Colegiul național „Carol I“ Craiova.

Clasa IV-a: Dinculescu N. M. (IV: 118, 121, 122), Grămescu I. M. (IV: 118, VII: 102, 103).

Clasa V-a: Antonescu St. (V: 111, 112), Cuniţescu G. (V: 111), Cetate Ciceiu Cosmin (V: 111*, 112*), Gheormănescu Dunăre D. G. (V: 142), Popescu O. (V: 112).

Clasa VII-a: Popescu Gh. (VII: 97, VIII: 15*, 16*).

Clasa VIII-a: Moisovici M. S. (VIII: 15*), Popiștean D. E. (VIII: 4, 10*).

Liceul „Frații Buzești“ Craiova.

Clasa VIII-a: Amărăștean F. M. (VIII: 4*, 10*, 14, 15*).

Liceul militar „D. A. Sturza“ Craiova.

Clasa IV-a: Bădescu F. C. (IV: 118, VII: 102, 103), Țurlescu P. A (IV: 118).

Clasa V-a: Cealic Sergiu (V: 112), Ciupag H. (V: 142), Corâciu I. M. (V: 142, 143), Enescu D. D. (V: 142, 143), Iordache I. Tr. (V: 142, 143), Lupu I. G. (V: 142, 143), Luțescu M. I. (V: 142, 143), Mădău I. (V: 112, 142), Manta V. S. (V: 112, 142, 143), Muraru P. D. (V: 112), Neguți I. N. (V: 142), Șandru M. G. (V: 142).

Clasa VI-a: Afronie I. I. (VI: 114*, 131, VII: 91*), 97, VIII: 23), Bădescu G N. (VI: 130, 131, VII: 91*), Cioc I. D. (VI: 114*, 118*, 130, 131, VII: 102, 103, VIII: 21, 23), Drăgușan D. D. (VII: 97), Grigore M. I. (VI: 130, 131), Pașoiu N. M. (VI: 114*, 130, 131, VII: 91*, 97, 114*, VIII: 21, 23), Popescu G· (VI: 114, 130. 131, VII: 97), Slăvuțescu I. M. (VI: 131, VII: 91*).

Clasa VIII-a: Bălănică M. (VIII: 21, 22, 23, 24), Comănescu T. (VIII: 21, 23, 24), Constantinescu Tr. (VIII: 21, 22, 23, 24), Dinculescu N. (VIII: 21, 23, 24), Dulămiță I. (VIII: 21), Iliescu V. D. (VIII: 4*, 14*, 32*), Micu. N. (VIII: 21*, 23*, 24), Segârceanu N. M. (VIII: 10*).

Liceul „N. Gane“ Fălticeni.

Clasa V-a: Dumitrov N. C. (V: 111*, VII: 97), Irimescu D. (V: 112)
Clasa VI-a: Teschievici G. (VIII: 23).

Liceul „Unirea“ Focșani.

Clasa V-a: Turtoiu F. (VI: 130).
Clasa VI-a: Nadolu T. A. (VI: 98, 107*).
Clasa VII-a: Focșăneanu S. (VII: 107*, 108*).
Clasa VIII-a: Kivu C. M. (VIII: 31*, 32), Martac R. (VIII: 10*).

Liceul Comunității Evreilor Galați.

Clasa V-a: Grossman M. A. (VII: 15*), Șalovici G. M. (V: 111, 112, 142, 143, VIII: 21, 23), Weissenberg A. M. (VI: 107, VII: 97, 102, 103, VIII: 15*).
Clasa VI-a: Behrmann S. M. (VI: 107*, 108), Leibovici A. M. (VI: 107, 131).

Liceul „Ion Maiorescu“ Giurgiu.

Clasa VI-a: Barbu A. A. (VI: 130, VII: 102, 103, 123, VIII: 21), Marinescu Gh. (VI: 130, VIII: 21*, 22*).

Liceul Internat Iași.

Clasa IV-a: Bedreag M. (V: 112).
Clasa VII-a: Matei Dumitru (VII: 93*, VIII: 15*, 21, 22, 23).

Liceul „Alexandru cel Bun“ Iași.

Clasa VI-a: Löbel W. H. (VI: 107, 108).

Liceul „Național“ Iași.

Clasa VI-a: Ionescu M. C. (VI: 107, 108*, 113, 114*).

Liceul militar Iași.

Clasa V-a: Bivolaru L. (V: 111 112), Ignațiu T. (V: 111, 112), Jipa C. A. (V: 111, 112, 143), Mamut P. (V: 111, 112), Pașcanu I. (V: 111, 112).
Clasa VI-a: Bârcă G. G. (VI: 130), Scobiola (VI: 130, 131).

Liceul „C. Brediceanu“ Lugoj.

Clasa V-a: Constantinescu L. (VII: 102, 103), Gall D. Z. (VII: 102, 103), Kaminski St. (VII: 101, 102, 103), Mihăileanu C. (VII: 102, 103), Neumann F. (VII: 102, 103), Popovici Gh. (V: 142, VII: 102, 103), Popovici M. (V: 143, VII: 102), Sfercoci I. (VII: 101, 102, 103).
Clasa VI: Sedmik C. V. (VI: 98), Stamate I. I. (VI: 98*, VII: 97, 101, 102, 103, VIII: 15, 16, 21, 22).

Liceul „Tasse Dumitrescu" Mizil.

Clasa IV-a: Dobre V. V. (IV: 118), Fotin G. I. (IV: 118), Teodorescu T. G. (IV: 118), Stănescu G. N. (IV: 118), Pană I. I. (IV: 118).

Clasa V-a: Botez M. M. (V: 142), Buznea R. (V: 112), Geambaşu V. T. (V: 142).

Liceul „Petru Rareş" Piatra Neamţ.

Clasa VIII-a: Albu N. Gh. (VIII: 15), Lazaride N. G. (VIII: 4*, 14, 15*), Mihăilescu P. (VIII: 15*, 16, 21*, 22*, 23*, 24*).

Liceul „I. Brătianu" Piteşti.

Clasa V-a: Nicolau Hagi A. (V: 111, 112*).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel" Ploeşti.

Clasa V-a: Grigorescu N. (V: 111*, 212).

Liceul „Roman Vodă" Roman.

Clasa VII-a: Rosenberg M. I. (VII: 91*, 92,* 93*, VIII: 15*, 16*).

Liceul „M. Eminescu" Satu Mare.

Clasa VII-a: Dâmboianu St. (97, 102, 103), Şilimon I. (VII: 102, 103).

Clasa VIII-a: Horvath B. (VIII: 21*, 23).

Liceul „En. Văcărescu" Târgovişte.

Clasa IV-a: Agatstein Ed. (IV: 108*),

Clasa VII-a: Dumitrescu H. (VII: 102), Constantin N. N. (VII: 102), Ionescu I. I. (VII: 102), Ştefănescu A. (VII: 102, 103, VIII: 15).

Clasa VII-a: Spirescu V. (VIII: 15*, 16. 21*, 22, 23*, 31*).

Liceul militar „N. Filipescu" Târgovişte.

Clasa II-a: Crăciunescu I. M. (VII: 107*, 108*).

Clasa V-a: Florescu L. V. 142*, 143, VI: 130, 131, VII: 108*).

Clasa VI-a: Muşat G. (VII: 102, 103), Negulescu D. St. (VII: 107*, 108*).

Clasa VII-a: Marinescu M. E. (VIII: 15*), Mazilescu C. (VII: 103, 115*, VIII: 217), Tătaru N. C. (VIII: 15, 21*, 33*).

Clasa VIII-a: Dascălu G. I. (VIII: 31*).

Liceul militar „Mihai Viteazu" Târgu Mureş.

Clasa IV-a: Zeveleanu G. G. (IV: 118).

Clasa VI-a: Bădescu I. (VII: 97, 102, 103, VIII: 15, 21*, 23*), Dalban Gh. (VIII: 16, 21*, 24), Hurezeanu C. (VIII: 21), Sechel I. M. (VIII: 15).

Clasa VII-a: Bucurenciu I. V. (VIII: 15*), Gaciu A. (VII: 107), Stoian S. I. (VII: 107*, 108*).

Clasa VIII-a: Bâdiu V. (VIII: 4*, 21*, 23*).

Liceul „Ştefan cel Mare“ Tighina.

Clasa VII-a: Ţiralis D. (VII: 85, 86*, 87*, 88*, 91*, 92, 93*, VIII: 10*, 15*, 16*).

Liceul „C. Diaconovici Loga“ Timişoara.

Clasa IV-a: Vasilescu A. M. Stabu (IV: 118, 119, V: 142*, 143*, VII: 97, 1*. 102*, 103, 121*, VIII: 15*, 44*).

Clasa V-a: Ciugudeanu C. (V: 101).

Clasa VII-a: Korniş E. (VII: 102, 103, 109*).

Clasa VIII-a: Dimitrievici I. (VIII: 31*).

Liceul „Traian“ Turnu Severin.

Clasa IV-a: Grigorovici D. (V: 108*), Gărdescu I. (V: 111*, 112*), Vaş P. (V: 112).

Clasa VI-a: Tilică Şt. (VII: 97, 102, 102, VIII: 15).

Clasa VII-a: Elujdescu G. (VII: 102, 103).

Fără indicaţie de şcoală şi clasă.

Bazac I. Al. (VII: 103, 103).

EXERCIŢII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 131.* Fie două plane paralele P şi P' şi un punct O. O dreaptă D trecând prin O înţeapă planele P şi P' în M şi M'. Dacă $\overline{OM} = \overline{OM'}$, orice dreaptă dusă prin O se va bucura de aceeaşi însuşire. N. M.

IV. 132. Să se rezolve ecuaţia:

$$(ax + c)(bx + c) = (ax + b)(bx + a)$$

şi să se verifice soluţia aflată. N. M.

IV. 133. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a^2+ab} + \frac{1}{ab(a^2-b^2)} = \frac{x}{(a^2+ab)(ab-b^2)} + \frac{y}{ab(a-b)} + \frac{1}{ab-b^2}$$

$$\frac{x}{a^2+ab+b^2} + \frac{y}{a^3+ab(a+b)} + \frac{1}{ab(a^3-b^3)} = \frac{x}{a^4b-ab^4} + \frac{y}{ab(a-b)} + \frac{1}{ab-b^2}.$$

C. I. B.

IV. 134. Să se arate că sistemele:

$$\text{I.}\begin{cases} \frac{x}{13}+\frac{y}{26}+\frac{1}{130}=\frac{x}{130}+\frac{y}{10}+\frac{1}{5} \\ \frac{x}{11}+\frac{y}{22}+\frac{1}{110}=\frac{x}{110}+\frac{y}{10}+\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases} \frac{x}{17}+\frac{y}{34}+\frac{1}{306}=\frac{x}{306}+\frac{y}{18}+\frac{1}{9} \\ \frac{x}{19}+\frac{y}{38}+\frac{1}{342}=\frac{x}{342}+\frac{y}{18}+\frac{1}{9} \end{cases}$$

au aceleaşi rădăcini.

C. I. B.

IV. 135. Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni:

$$\begin{cases} -x+y=+1 \\ +2x+3y=+13 \\ +3x+2y=+12 \\ +x+y=+5. \end{cases}$$

O. N. Ţ.

IV. 136. Să se găsească sistemele de numere întregi mai mici ca *48* care verifică ecuaţiunea:

$$4x+3y=48.$$

O. N. Ţ.

IV. 137. Se dă în spaţiu un cerc O aşezat în planul P şi două puncte A şi B. Să se găsească un punct M pe cercul O astfel ca să avem:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}.$$

Discuţiune asupra soluţiunilor problemei.

O. N. Ţ.

IV. 138. Pe o dreaptă Δ însemnăm trei puncte astfel ca: $\overline{AC} = \overline{CE} = 2$. In punctele A, C, E ridicăm în spaţiu pe Δ trei segmente $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ astfel ca $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = 2$, iar

$$(AD\ ,\ CD) = 120^0 \text{ şi } (CD\ ,\ EF) = 120^0.$$

Să se arate că triunghiul BDF este isoscel şi să se arate că direcţiile BD şi DF fac cu direcţia dreptei Δ un unghiu de 60^0.

[Prin (Δ, Δ') se reprezintă unghiul direcţiei Δ' cu Δ].

(*Indicaţiune.* Elevii pot construi figura în spaţiu cu sârme).

O. N. Ţ.

IV. 139. Intr'un plan vertical P este aşezat un triunghiu isoscel ACB ($\overline{AC} = \overline{CB}$) astfel ca axa lui de simetrie CC' să fie aşezată orizontal. Prin punctele A şi B ducem două drepte paralele AA' şi BB' exterioare planului P, iar în punctul C o perpendiculară CO pe planul P care înţeapă planul AA'BB' în O. Să se determine planul AA'BB' astfel ca triunghiul AOB să fie echilateral.

a) Discuţiune.

b) Dacă triunghiul ACB este echilateral, este posibilă problema?

O. N. Ţ.

IV. 140. Un negustor achită datoria sa plătind de trei ori în felul următor: *a)* o şesime din datoria care o avea; *b)* o douăsprezecime din datoria care o avea plus încă un sfert din ce rămăsese după prima plată; *c)* a douăzecişipatra parte din datoria care o avea plus un sfert din ce mai rămăsese după a doua plată şi încă 3500 lei. Ce datorie a achitat negustorul?

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 156.* Să se construiască un triunghiu ABC în care se cunoaşte latura $\overline{BC}$, unghiul A şi piciorul D al uneia din bisectoarele unghiului A.

Gh. B.

V. 157. Pe mijlocul razei OA a cercului O se ridică o perpendiculară care taie cercul în B şi C. Tangentele la cerc în aceste puncte se întâlnesc în P. Să se demonstreze ca:

$$\overline{OP} = 2 \times \overline{OA}.$$

Gh. B.

V. 158. Care este relația de condiție pentru ca între rădăcinile ecuațiunei

$$x^3 + px + q = 0$$

să se verifice egalitatea

$$\frac{x_1 + px_2}{qx_1 + x_2} = \frac{p}{q}.$$

GH. B.

V. 159. Să se calculeze produsul:

$$(1 - i)(1 - 2i)(1 - 3i)(1 - 4i)$$

unde: $i^2 + 1 = 0$

A. A. R.

V. 160. Să se verifice identitatea:

$$[[(i^3 + i)^3 + i]^3 + i]^3 = -2i$$

unde $i^2 + 1 = 0.$

A. A. R.

V. 161. Să se calculeze:

$$\frac{1 + i}{(1 - i)^2}$$

punându-se sub forma $(a + bi)$.

A. A. R.

V. 162. Să se rezolve ecuațiunea:

$$(ax + c)(bx + c) = (cx + a)(cx + b).$$

N. M.

V. 163. Să se rezolve ecuațiunea:

$$(cx + a)(cx + b) = (ax + b)(bx + a).$$

Să se verifice soluțiunile aflate.

N. M.

V. 164. Fie $\overline{AB}$ un segment de dreaptă; se poartă pe perpendicularele în A şi B pe el, lungimile $\overline{AA'} = 2\,\overline{AB}$ şi $\overline{BB'} = 3\,.\,\overline{AB}$ de aceeaşi parte. Dreptele AB' şi BA' fac între ele un unghiu de 45^0.

N. M.

V. 165. Fie un cerc de centru O; A un punct exterior. Cercul de diametru $\overline{OA}$, taie o paralelă la diametrul OA, dusă la o distanţă cât jumătatea razei cercului O, în punctele M_1 şi M_2. OM_1 şi OM_2 taie tangentele din A la cercul O, respectiv în punctele P_1 şi P_2. Triunghiurile OAP_1 şi OAP_2 sunt isoscele.

N. M.

V. 166. ABCD fiind un trapez dreptunghiu în care baza mică $\overline{AD}$ este egală cu DC, cea mai mare dintre laturile neparalele, să se arate că depărtarea punctului A la DC este egală cu înălţimea trapezului.

C. I. B.

V. 167. Un triunghiu ABC are $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 6$. Perpendiculara dusă din A pe mediana BM a vârfului B taie latura BC în D, iar paralela dusă prin D la AB taie latura AC în E. Să arate că $\overline{EM} = 1$. C. I. B.

V. 168. ABCD fiind un trapez dreptunghiu în care baza mare $\overline{BC}$ este egală cu $\overline{DC}$ (cea mai mare dintre laturile neparalele), să se arate că depărtarea punctului B la DC este egală cu înălţimea trapezului. C. I. B.

V. 169. x' şi x'' fiind rădăcinile ecuaţiunii de gradul al doilea $x^2 + px + q = 0$, să se formeze ecuaţiunea care are ca rădăcini:

$$y_1 = x' + x'^2 \quad \text{şi} \quad y_2 = x'' + x''^2.$$

O. N. Ţ.

V. 170. x' şi x'' fiind rădăcinile ecuaţiunii, de gradul al doilea, $x^2 + px + q = 0$, să se formeze ecuaţiunea care admite rădăcinile:

$$y_1 = p + \frac{1}{x'} \quad \text{şi} \quad y_2 = p + \frac{1}{x''}\cdot$$

O. N. Ţ.

Clasa VI-a. *Exerc. 143.* Dacă a, b, c sunt trei termeni consecutivi ai unei progresiuni aritmetice de raţie r, atunci

$$b^2 = r^2 + ac.$$

GH. B.

VI. 144. Fie $a < b < c$ trei termeni ai unei progresiuni aritmetice aşa aleşi în cât între a şi b mai sunt $n - 1$ termeni, iar între b şi c mai sunt deasemeni $n - 1$ termeni. Să se demonstreze că

$$b^2 = (a \times c) + n^2 r^2,$$

unde r este raţia progresiei considerate.

GH. B.

VI. 145. Intr'un trapez dreptunghiu ale cărui diagonale sunt perpendiculare, fie d lungimea diagonalei mari, α unghiul pe care această diagonală îl face cu baza mare şi l lungimea laturei neperpendiculară pe baze.

Să se stabilească relaţia:

$$\frac{l}{d} = \frac{\sqrt{1 + 3\cos^2 2\alpha}}{2\cos\alpha}$$

C. I. B,

VI. 146. Volumul şi suprafaţa laterală a unei prisme, sunt proporţionale cu suprafaţa şi perimetrul secţiunii drepte.

N. M.

VI. 147. Să se calculeze valoarea exactă a $\mathrm{tg}22^\circ 30'$.

O. N. Ţ.

VI. 148. Să se calculeze valoarea exactă a $\mathrm{cotg}7^\circ 30'$.

O. N. Ţ.

VI. 149. Să se arate că oricare ar fi unghiul x expresiunile:

$$E_1 \equiv \cos^2 x - \cos x - 6$$

$$E_2 \equiv 9\sin^2 x - 6\sin x - 35$$

sunt pozitive.

O. N. Ţ.

VI. 150. A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu, să se determine α şi β astfel ca expresiunea:

$$E \equiv x^3 \sin A \sin B \sin C + \alpha x^2 y (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + \beta x y^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) + y^3 \cos A \cos B \cos C$$

să poată fi pusă sub forma:

$$E \equiv (x \sin A + y \cos A)(x \sin B + y \cos B)(x \sin C + y \cos C).$$

O. N. Ţ.

VI. 151. O piramidă regulată cu douăsprezece muchii laterale, are lungimea muchii laterale cât îndoitul razei poligonului de bază. Să se calculeze: suprafaţa laterală, suprafaţa totală şi volumul acestei piramide, când raza poligonului de bază este presupusă cunoscută.

O. N. Ţ.

VII. 152. O piramidă regulată cu şasesprezece muchii laterale are apotema feţei laterale cât îndoitul înălţimii piramidei. Fiind cunoscut perimetrul poligonului de bază, să se calculeze suprafaţa totală şi volumul piramidei regulate.

O. N. Ţ.

Clasa VII-a. *Exer. 133.* Să se verifice că:

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \arccos \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1}.$$

N. M.

VII. 134. Să se verifice prin derivare:

$$\arcsin \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2x^2}} + \arcsin \frac{c}{\sqrt{c^2+b^2x^2}} = \arcsin \frac{(a+b)\,cx}{\sqrt{(c^2+a^2x^2)(c^2+b^2x^2)}}$$

$$\arccos \frac{ax}{\sqrt{c^2 + a^2 x^2}} + \arccos \frac{bx}{\sqrt{c^2 + b^2 x^2}}$$

$$= \arccos \frac{abx^2 - c^2}{\sqrt{(c^2 + a^2 x^2)(c^2 + b^2 x^2)}}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{c}{ax} + \operatorname{arctg} \frac{c}{bx} = \operatorname{arctg} \frac{(a+b)cx}{abx^2 - c^2}.$$

N. M.

VII. 135. Să se studieze variațiunea funcțiunii de variabilă reală:

$$y = x^{2n} + A \qquad (n \text{ întreg positiv}).$$

(A fiind un număr real) și să se deducă din reprezentarea variațiunii că ecuațiunea binoamă de forma:

$$x^{2n} + A = 0$$

are:

1°. Două rădăcini reale contrarii dacă $A < 0$ și

2°. Nici o rădăcină reală dacă $A > 0$.

O. N. Ț.

VII: 136. Să se studieze variațiunea funcțiunii de variabilă reală:

$$y = x^{2p+1} + A$$

în care p este întreg pozitiv, iar A un număr real.

Să se deducă din reprezentarea variațiunii, că ecuațiunea binoamă de forma:

$$x^{2p+1} + A = 0$$

are totdeauna o singură rădăcină reală.

O. N. Ț.

VII. 137. Să se studieze variațiunea funcțiunii de variabilă reală:

$$y = x^3 - x + 1$$

și să se arate că ecuațiunea:

$$x^3 - x + 1 = 0$$

are o singură rădăcină reală cuprinsă în intervalul $(-2, -1)$.

O. N. Ț.

VII. 138. Să se studieze variațiunea funcțiunii de variabilă reală

$$y = 2x^3 - x^2 - 1$$

și să se arate prin reprezentarea acestei variațiuni, că ecuațiunea:

$$2x^3 - x^2 - 1 = 0$$

are o singură rădăcină reală pozitivă.

O. N. Ț.

VII. 139. Să se studieze variațiunea funcțiunii de variabilă reală:

$$y = x^n - x^{n-1} - 1 \qquad (n \text{ întreg pozitiv}).$$

Să se deducă din reprezentarea variațiunii că ecuațiunea:

$$x^n - x^{n-1} - 1 = 0$$

are: dacă n este impar o rădăcină reală pozitivă, iar dacă n este par o rădăcină pozitivă și una negativă.

Să se examineze cazul funcțunii:

$$y = x^n - x^{n-1} + 1.$$

O. N. Ț.

VII. 140. Să se studieze variațiunea funcțiunii de variabilă reală:

$$y = x^4 - x^3 + a.$$

1°. Când $a = +1$; 2°. Când $a = -1$.

Ce consecințe putem deduce pentru ecuațiunea:

$$(x^4 - x^3)^2 - 1 = 0?$$

Dar pentru ecuațiunile de forma:

$$(x^4 - x^3)^{2n} - 1 = 0? \qquad (n \text{ întreg pozitiv}).$$

O. N. Ț.

VII. 141. Să se studieze variațiunea funcțiunii de variabilă reală:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 0 & +6 \\ +1 & x^2 & +1 \\ +1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ce consecinţe se deduc din această variaţiune pentru ecuaţiunea :

$$(x^3 - 6x^2)^3 - 216 = 0?$$

Dar pentru ecuaţiunea :

$$(x^3 - 6x^2)^{2p+1} - 2^{2p+1} \cdot 3^{2p+1} = 0 \ ?$$

(p întreg pozitiv).

O. N. Ţ.

VII. 142. Să se studieze variaţiunea funcţiunii de variabilă reală :

$$y = \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + \left(\frac{x+b}{x+a}\right)^2 \quad (a \neq b)$$

şi să se reprezinte această variaţiune.

O. N. Ţ.

VII. 143. Să se studieze variaţiunea funcţiunii de variabilă reală :

$$y = \left(\frac{x^n + a}{x^n + b}\right)^p + \left(\frac{x^n + b}{x^n + a}\right)^p$$

şi să se reprezinte această variaţiune.

(n şi p sunt numere întregi, pare sau impare).

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 60.* Să se determine a astfel ca punctul $M\,(a,\ 1)$ să se găsească pe dreapta care uneşte punctele $A\,(2,\ 3)$, $B\,(5,\ 6)$.

A. A. R.

VIII. 61. Să se calculeze raportul $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$, a având valoarea găsită în exerciţiul precedent.

A. A. R.

VIII. 62. Să se determine c astfel ca dreptele:

$$4x + 3y - c = 0$$

$$2x + 2y - 1 = 0$$

$$3x + 6y - 5 = 0$$

să fie concurente. Să se găsească punctul de intersecție.

A. A. R.

VIII. 63. Se dau dreptele:

$$3x + y - a = 0$$

$$x - 3y + a = 0.$$

Să se arate că dreapta care unește origina cu punctul lor de intersecție este fixă, când parametrul a variază.

A. A. R.

VIII. 64. Prin punctul $A\,(a, o)$ se duc drepte variabile AM. Se cere locul geometric al picioarelor perpendicularelor coborîte din punctul $B\,(o, b)$ pe dreptele AM.

A. A. R.

VIII. 65. Se dau dreptele:

$$x + y - 1 = 0$$

$$x - y + 1 = 0.$$

Să se calculeze suprafața pătratului format de aceste drepte și perpendicularele ridicate pe ele din origină.

A. A. R.

VIII. 66. Să se rezolve ecuațiunea:

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + a = 0,$$

știind că are o rădăcină dublă.

A. A. R.

VIII. 67. Să se rezolve ecuațiunea:

$$x^6 - 5x^5 - 2x^4 + 11x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0,$$

știind că are rădăcinile multiple.

A. A. R.

VIII. 68. Să se arate că:

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = -\operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x + c.$$

A. A. R.

VIII. 69. Să se arate că:

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\operatorname{cotg} x - \operatorname{cosec} x + c.$$

A. A. R.

VIII. 70. Să se arate că:

$$\int \frac{dx}{1 - \sin x} = \operatorname{tg} x + \sec x + c.$$

A. A. R.

VIII. 71. Să se arate că:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \operatorname{tg} x - \sec x + c.$$

A. A. R.

VIII. 72. Să se rezolve ecuația:

$$x^5 + 6x^4 - 25x^3 - 70x^2 + 24x + 64 = 0$$

știind că polinomul ei este astfel că

$$P(a) = P(a^2) = P(a^3) = 0.$$

N. M.

VIII. 73. Să se găsească valorile lui x, pentru care valoarea polinomului

$$x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^3 + 3x - 1$$

să fie mai mare ca 100.000.

A. A. R.

VIII. 74. Care este condiţiunea, ca ecuaţiunea

$$a^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

să se poată pune sub forma unei ecuaţiuni binoame.

A. A. R.

VIII. 75. Să se rezolve ecuaţiunea

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0,$$

ştiind că rădăcinile sunt în progresie aritmetică.

A. A. R.

ERATĂ. La exesciţiul 125 pentru clasa VI dela pag. 82 se va înlocui logP prin

$$\log P = 24{,}65175.$$

La problemele IV. 125 şi VI. 139, segmentul de dreaptă din planul P se va considera perpendicular pe linia de intersecţie a planelor P şi Q.

La Ex. VIII : 55 se va ceti $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{2}$ în loc de $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2}$.

Soluţiunile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului şi se redactează după „Instrucţiunile“ publicate în Nr. 1, pag. 24.

Elevii din clasele VI, VII şi VIII cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii soluţionând probleme din „Gazeta Matematică“.

„Gazeta Matematică“ apare la 15 al fiecărei luni. Costul abonamentului este 200 lei şi se trimite la „Casa Gazeta Matematică“ Calea Griviţei 158 — Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate „Societăţii Gazeta Matematică“.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIȚII

ANUL II. No. 7 — 1 APRILIE 1936

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluții, abonamente și orice corespondență pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviței 158. — București 2

EXERCIȚII REZOLVATE

Clasa IV-a. *Exerc. 103. Să se stabilească identitatea:*

$$(a^2+b)(a+b^2)(a^2-b)-(a^2-b)(a-b^2)(a+b^2)$$
$$+(a+b^2)(a^2+b)(a-b^2)+(a^2-b)(a-b^2)(a^2+b)$$
$$\equiv 2(a-b)[a^4+b^4+ab(a^2+ab+b^2+1)].$$

C. I. B.

Notăm

$$P_1=a^2+b\ ,\ P_2=a^2-b\ ,\ P_3=a+b^2\ ,\ P_4=a-b^2.$$

Membrul I al identității se scrie

$$P_1P_3P_2-P_2P_4P_3+P_3P_1P_4+P_2P_4P_1=P_3P_4(P_1-P_2)+P_1P_2(P_3+P_4)$$
$$=2b(a^2-b^4)+2a(a^4-b^2)=2[a^2b-b^5+a^5-ab^2]$$
$$=2[(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)+ab(a-b)]$$
$$=2(a-b)[a^4+b^4+ab(a^2+ab+b^2+1)].$$

IV. 104. Să se stabilească identitatea:

$$(a^2+b)(a+b^2)(a^2-b)+(a^2-b)(a-b^2)(a+b^2)$$
$$+(a+b^2)(a^2+b)(a-b^2)-(a^2-b)(a-b^2)(a^2+b)$$
$$\equiv 2(a^2-b^2)(a^2+b^2+a^2b^2).$$

C. I. B.

Notăm

$$P_1 = a^2 + b \ , \ P_2 = a^2 - b \ , \ P_3 = a + b^2 \ , \ P_4 = a - b^2.$$

Membrul I al identității se scrie:

$$P_1P_2P_3 + P_2P_3P_4 + P_1P_3P_4 - P_1P_2P_4 = (P_1 + P_2)P_3P_4 + (P_3 - P_4)P_1P_2$$
$$= 2a^2(a^2 - b^4) + 2b^2(a^4 - b^2) = 2(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + a^2b^2).$$

Până la 10 Martie s'au primit soluțiuni bune pentru exercițiile publicate în numerele 3, 4, 5, 6 dela [1]:

Școala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu" București.

Clasa V-a: Nicolau A. Elena (VI: 115, 116).

Clasa VI-a: Bendorf A. Alexandra (VI: 129), Lupu N. Maria (VI: (VI: 109, 110, 111), Nedelcu Marcela (VI: 129), Romașcan G. Georgeta (VI: 109, 112, 114, 116*, 117*, 138*), Stănescu N. Virginia (VI: 120, 129, VII: 97, VIII: 39, 41), Trofin I. Aurora (VI: 111).

Liceul de fete „Regina Maria" București.

Clasa IV-a: Cohn Lidia (IV: 88, 89, 90, 92, 94, 95, 97), Dan Aurora (IV: 118), Paladescu Cristina (IV: 120*, 123*, 126*, 134*, 135*, V: 124*, 166*, 167*, 168*), Șerbănescu P. Viorica (IV: 88, 89, 91*, 97, 107, 106, 118*, 120*, 123, 124*, V: 124*, 125*, 136*, 137*, 139*, 161*, 162*, 167*).

Clasa VI-a: Iacoby D. Marcela (VI: 124), Odobescu Simona (VI: 138).

Liceul de fete „Carmen Silva" București.

Clasa IV-a: Mayer P. Silvia (IV: 111, 112, 118, V: 140), Niculescu Paula Ana (IV: 109, 118), Nissim L. Mioara (IV: 118*, 120*, 126*), Pinsler Fani (IV: 110, 111, 112, 113, 116, 118), Renert Tica (IV: 110, 111, 112, 113, 118, 131*, 132*, V: 140), Walter Stela (V: 118, 126).

Clasa VI-a: Birtulescu G. Laura (VI: 110, 111).

Clasa VII-a: Petrov E. Elena (VII: 121).

Liceul de fete „Domnița Ileana" București.

Clasa V-a: Bădulescu V. Viorica (V: 124, 125, 126, 127*, 134, 139* 140*, 146, 147, 149, 162, VII: 97), Crăciun A. Aurelia (V: 129, 142, 143, VI: 94*, 95, 118*). Floricică Elena (V: 130, 134. 140), Goldenberg I. Henriette (V: 129, 142, 143), Ionescu C. Mariana (V: 129, 139*, 146*, 148*, 149*, 150*).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.
S'au mai primit soluții bune care vor fi menționate în numărul următor.

Institutul de fete „Moteanu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Munroe M. Manuela (IV: 106*, 107*, 108*, 118, 120*, 121*, 122*, 123*, 124*, 125, 126*, 127*), Şerbănescu Georgeta (IV: 95).

Institutul de fete Ortodox internat Bucureşti.

Clasa IV-a: Plăviţescu N. Clementa (IV: 92*, 94, 95*, 105*, V: 124*).
Clasa V-a: Otetelişanu Ruxandra (V: 140).

Institutul de fete „Bolintineanu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Onigu D. Theodora (IV: 94, 95), Slomnescu Dinah (IV: 122).
Clasa V-a: Dinulescu Sofica (V: 142, 143).

Externatul ortodox „Zoe Romniceanu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Oancea M. Ileana (IV: 90).
Clasa VII-a: Rociu I. Margareta (VII: 110*).

Liceul de fete „Iulia Haşdeu“ Bucureşti.

Clasa VIII-a: Stratilescu Victoria (VIII: 21*, 23*, 24*).

Liceul de fete „Dr. C. Angelescu“ Buzău.

Clasa V-a: Ionescu Maria (V: 129).
Clasa VIII-a: Ionescu G. Filofteia (VIII: 36, 37).

Liceul de fete Caracal.

Clasa VI-a: Musceleanu Ileana (VI: 96*, 110, 111, 112, 130*, 131).

Liceul de fete particular Cernăuţi.

Clasa IV-a: Sekler Ilse (IV: 144).

Liceul de fete „Mihail Kogălniceanu“ Galaţi.

Clasa VII-a: Gricoriu D. Aurora (VII: 111*, 112*, 121).
Clasa VIII-a: Burdescu I. Maria (VIII: 38). Finkelstein M. Cornelia (VIII: 6*, 8*, 9*, 11*, 13*, 27*).

Liceul de fete „Oltea Doamna“ Iaşi.

Clasa VI-a: Stoicescu G. Cristineta (VI: 110, 111).

Liceul de fete „Despina Doamna“ Ploeşti.

Clasa V-a: Petrescu N. Mietta (V: 129, 140).

Gimnaziul de fete Roşiorii de Vede.

Clasa IV-a: Mihail Tinuţa (IV: 120*, 126*).

Liceul maicelor din Satu-Mare.

Clasa IV: Seleş Lucia (IV: 94, 95*, 110*, 111*, 112*, 113, 114, 116*).

Şcoala normală de fete „Andrei Şaguna" Sibiu.

Clasa V-a: Ivan Maria (V: 129, 144).

Liceul de fete „Carabella" Târgovişte.

Clasa IV-a: Diaconescu I. Maria (IV: 95, 96), Dumitrescu A. Elena (IV: 89, 95*, 96), Şerban C. Maria (IV: 94), Spălăţeanu I. Stela (IV: 94, 95, 96).

Clasa VI-a: Diaconescu A. Ecaterina (VI: 110, 111).

Clasa VII-a: Macedonescu Şt. Irina (VII: 133, 134).

Liceul de fete „Carmea Sylva" Timişoara.

Clasa IV-a: Checian N. Ana (IV: 99, 100, 110, 112), Domonkos O. Erica (IV: 110, 112).

Clasa VII-a: Guttmann A. Paraschiva (VII: 97, 107, 108), Schimmerling Gertruda (VII: 107, 108), Spitzer Klara (VII: 107, 108).

Liceul de fete „Principesa Elena" Turnu-Severin.

Clasa VI-a: Ionescu Gh. Bălaşa (VI: 94, 95*), Şalavarim M. Constanţa (VI: 94, 95, 111).

Liceul „Spiru Haret" Bucureşti.

Clasa IV-a: Dailis A. (IV: 88, 89, 90, 94*, 95, 106, 107, 110, 111, 112, 114*), Şeibulescu A. C. (IV: 111, V: 122).

Clasa V-a: Cernovodeanu I. I. (V: 137*), Stănculescu M. (V: 125*, 142, 143, 144, VI: 111, 118*, 120*, VII: 97).

Clasa VI-a: Chiriceanu M. A. (VII: 133), Stănculescu I. (VI: 110, 113*, 114, 117, 118*, VII: 97, VIII: 23).

Clasa VII-a: Angelescu I. C. (VII: 131, VIII: 52), Druţu T. (VII: 97*), Solavici S. M. (VII: 97, 110).

Clasa VIII-a; Iotzu C. A. (VII: 18, 20, 21*, 45*, 46, 47, 48*, 49*, 50* 72*), Moscuna I. O. (VIII: 31*, 32, 41), Teodoreanu A. D. (VIII: 14*, 15, 17*, 18),

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti.

Clasa V-a: Căţoiu S. S. (V: 129*, 130, 134, 140, 141*, VII: 118*), Ionescu V. G. (V: 129, 140).

Clasa VI-a: Drouhet E. E. (VI: 109, 110, 111, 130), Popescu A. M. (VI: 130, 139, 146), Popescu F. M. (VI: 124, 131, VII: 95), Popescu H. M. (VI: 115*, 118*, 119*, 150*), Popescu S. W. (VI: 118), Segal I. B. (VI: 94, 95, 96, 130*).

Clasa VII-a: Ballan A. L. (VII: 98*, 99*, 100*, 121), Begu I. S. (VII: 120), Drăghicescu F. M. (VII: 97, 98*, 99*, 100*, 121, VIII: 15*, 24*), Segal E. (VII: 18, 20, 21*, 23*, 24),

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa IV-a: Crain D. G. (IV: 110, 111, 112, 113, 116), Georgescu S. V. (IV: 110, 111, 112), Grosvald A. R. (IV: 94, 95, 110, 111, 112, 113), Lenart I. A. (IV: 91, 92, 93, 94, 95, 110, 111, 112, 140, V: 122, 124). Niculescu C. E. (IV: 110, 112, V: 162), Tomasini G. I. (IV: 111).

Clasa V-a: Francesco L. M. (V: 108), Georgescu N. P. (V: 129, 139*).

Clasa VI-a: Popescu Zorica N. A. (VI: 111, 124).

Institutul „Schewitz Thierrin" Bucureşti.

Clasa IV-a: Goldenberg V. E. (IV: 94, 110, 111, 112, 113, 114), Mihăilescu L. V. (IV: 118).

Clasa IV-a: Ghica N. P. (VI: 111, 124, 131, 142), Mihăilescu L. A. (VI: 118*, 133*, 140), Slomneanu I. I. (VI: 133*, 134*, 135*, 136*, 142), Theodorescu N. (VI: 138), Ulivi L. (VI: 116*, 124, 131, 142), Zamfirescu G. M. (VI: 110, 111, 112, 124).

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa IV-a: Woinarosky O. G. (IV: 104).

Clasa VI-a: Preciado I. T. (VI: 111, 124, 126*, 128), Şaichim O. A. (VI: 126, VII: 116, 117, 120, VIII: 18, 19, 20), Silberman I. T. (VI: 94, 110, 111).

Clasa VII-a: Dulberger M. M. (VII: 88, VIII: 16), Gregore S. A. (VII: 107*, 108*, 110*, 126, 129*, 130*).

Liceul „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa V-a: Fulga L. T. (VI: 94), Georgescu N. C. (V: 129), Horwath I. S. (V: 129, 104*), Stoicescu C. C. (V: 129, 134, 140).

Clasa VII-a: Buzescu P. V. A. (VII: 114*, 121, 122*, 125*, 129*, 130*, 131*, VIII: 21*, 23*, 24*, 46).

Clasa VIII-a: Dimitriu S. T. (VIII: 41*, 48*,), Marinescu S. S. (VIII: 18, 41).

Colegiul Naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa IV-a: Vaeni C. M. (IV: 110, 112).

Clasa V-a: Ciurescu I. R. (V: 140, 141, 142, 143, 144*, VI: 120, 134, VII: 39, 40), Hariton I. I. (V: 145), Jicmon A. S. (V: 139, 140), Popescu C. H. (VIII: 39, 40).

Clasa VI-a: Stroescu M. (VII: 102, 103).
Clasa VII-a: Neagu V. V. (VIII: 28*, 29*, 30*).

Liceul „Cantemir Vodă" Bucureşti.

Clasa VI-a: Capriel G. A. (VI: 94, 95, 96*).
Clasa VII-a: Dinescu S. R. (VII: 97, 98, 129*, 130), Georgescu N. N. (VII: 94, 95, 116, 118, VIII: 18).

Liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti.

Clasa IV-a: Can I. S. (IV: 121, 126*).
Clasa V-a: Constantinescu V. C. (VI: 121, 140), Struţeanu S. M. (VI: 110, 111).
Clasa VI-a: Enciulescu G. I. (VI: 124).
Clasa VII-a: Paladi Beiu E. (VIII: 15*).

Liceul „Gh. Şincai" Bucureşti.

Clasa V-a: Cetăţeanu G. S. (V: 122, 129, 134, 140, 142, 143, 144*, 145, 146*, 148*, 149, 150, VII: 97).

Liceul „Sf. Andrei" Bucureşti.

Clasa VI-a: Mateescu A. I. (VI: 110, 118, 124, 129).
Clasa VIII-a: Bendorf A. G. (VIII: 25, 26*, 27*, 44).

Liceul „Marele Voevod Mihai" Bucureşti.

Clasa V-a: Schwarz V. I. (V: 140).
Clasa VIII-a: Goldenberg I. M. (VIII: 39, 60, 61, 62, 63, 64, 65).

Seminarul pedagogic Universitar „Titu Maiorescu" Bucureşti.

Clasa V-a: Bodnărescu M. H. (V: 129).
Clasa VI-a: Linaru N. N. (VI: 138).

Liceul „Mihail Eminescu" Bucureşti.

Clasa VI-a: Bădulescu V. V. (VI: 146).

Liceul „Ion Creangă" Bălţi.

Clasa VII-a: Repetur D. S. (VII: 108*, 111*, 129*, 133, VIII: 39).

Liceul „Codreanu" Bârlad.

Clasa IV-a: Pavelescu V. D. (IV: 118, 132*, V: 162, 163).
Clasa V-a: Leizer S. T. (V: 134, 140), Toporaş P. (V: 144).
Clasa VII-a: Edelstein L. (VII: 107, 108*, 110, 121), Enăchescu B. (VII: 97), Fărcăşanu D. F. (VII: 97, 110), Georgian P. (VII: 97).
Clasa VIII-a: Ivănescu P. I. (VIII: 28*, 29*, 30*, 31*, 36, 37, 41*, 42*, 46, 52*).

Liceul „Samuil Vulcan“ Beiuș.

Clasa V-a: Ardeleanu D. A. (V: 129, 134, 141), Jidanu I. C. (V: 134, 139*, 140, 141, 144, 145, 162, VII: 114*), Moș T. (V: 123, 129, 140, 144), Todoran G. G. (V: 129, 140).

Clasa VI-a: Văcariu A. (VI: 124).

Clasa VII-a: Chirvai I. V. (VII: 107*, 108*, 121, VIII: 21*, 23*, 24), Hompola I. T. (VII: 96, 104, 106, 121), Marica P. (VII: 86*, 108*, 114*, 115*, 116, 117, 118, 119, 121, VIII: 18).

Liceul „Sf. Vasile“ Blaj.

Clasa VII-a: Hossu I. I. (VII: 129*, 130*, VIII: 46).

Liceul „Laurian“ Botoșani.

Clasa V-a: Ciomaga I. I. (V: 120).

Școala comercială superioară Brăila.

Anul I: Cohl M. (IV: 78, 79, 80, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104), Dumitrescu G. N. (IV: 118), Grünberg Z. (IV: 118), Stanef D. V. (IV: 110, 111, 112, 113).

Liceul „Andrei Șaguna“ Brașov.

Clasa IV-a: Stoian A. E. (IV: 110, 111), Zăvoianu M. (IV: 92, 93, 94).

Clasa VIII-a: Ticușan M. (VIII: 21*, 22, 23*, 24).

Liceul „Ioniță Asan“ Caracal.

Clasa VIII-a: Clipea I. (VIII: 36, 37), Ilie I. (VIII: 21*, 22), Uciu I. A. (VIII: 31*),

Liceul „Dinicu Golescu“ Câmpulung Muscel.

Clasa VIII-a: Popescu V. F. (VIII: 21, 32).

Liceul „Dragoș-Vodă“ Câmpulung Bucovina.

Clasa V-a: Corlățan Șt. L. (V: 129, 140, VI: 111, 118*).

Liceul „Ortodox de băieți“ Cernăuți.

Clasa VII-a: Cordoș F. (VIII: 13*), Cherner E. E. (VII: 131*), Mendel E. T. (VII: 97, VIII: 21, 23*), Rolant F. (VII: 91, 97, VIII: 13*, 16).

Școala de conductori și desenatori Arhitecți Cernăuți.

Anul I și II: Badler B. (V: 154), Ball I. (VIII: 21*, 23*), Fain B. (V: 120, 122, 130, 154), Galerin V. (V: 120, 130, 132, 162, VI: 114*, 126, VIII: 21*, 23), Horwath T. (V: 120 121, 122, 134, 144, 154, 162), Marinov P. (V: 154), Runzer I. (VIII: 21), Scutaru I. (V: 129, 130, 132, VI: 126, VII: 114*, VIII: 21, 23), Șlamovici I. E. (V: 140, 141, 144), Strum S. (V: 140), Țărnă I. (V: 152*), Ursu P. (VIII: 42*).

Gimnaziul „Miron Costin" Cernăuți.

Clasa VII-a: Maximilian A. M. (VII: 121).

Liceul militar „Ștefan cel Mare" Cernăuți.

Clasa IV-a: Gheorghiu V. L. (IV: 110), Ionescu D. S. (IV: 110, 112), Onișor V. (IV: 110), Rohr I. A. (IV: 94, 121, V: 111).

Clasa V-a: Alexandrescu G. P. (V: 129, 140, 141), Bălăuță G. (V: 134, 140), Bărgăuanu M. (V: 134, 140), Bobulescu A. (V: 140), Bretcanu C. (V: 140), Căpriș A. (V: 140), Cosma A. (V: 140), Dombrovschi P. I. (V: 134, 140), Dumitrescu V. M. (V: 140), Dumitrescu C. P. (V: 129, 140), Lazăr G. D. (V: 134, 140), Mătieș E. M. (V: 129), Metz M. (V: 134, 140), Moțoc L. R. (V: 129, 140), Poalelungi G. V. (V: 140), Popoviciu C. A. (V: 134, 140), Rotta I. S. (V: 129, 140), Șerbănescu S. (V: 140), Stănescu V. (V: 111, 112, 140), Ștefănescu A. (V: 134, 140), Stoicescu S. (V: 134), Vasiliu G. N. (V: 140).

Clasa VI-a: Apostol G. N. (VI: 129, VIII: 39), Bancea N. N. (VI: 128, 129, 142), Bartic G. (VI: 142), Bosinceanu D. G. (VI: 128, 129, VIII: 39). Boșoldea G. G. (VI: 142, VIII: 39), Curcă G. C. (VI: 130, VIII: 39), Dumitrescu V. (VIII: 39), Floareș I. A. (VI: 128, 129, 142, VIII: 39), Lazăr A. (VI: 128, 129), Mazilu C. G. (VI: 129, 142), Minaciu T. N. (VI: 142, VIII: Nedelcu V. N. (VI: 110, 126*, 129, VIII: 39), Negulescu A. A. (VIII: 39), 39), Nicolaescu I. T. (VI: 128, 129, 142), Popa C. B. (VI: 128, 129, 242), Romano V. M. (VI: 142), Rusu I. E. (VI: 110, 111, 128, 129, VIII: 39), Tomescu G. T. (VIII: 39), Vieru M. M. (VI: 128, 129, 142, VIII: 39).

Clasa VII-a: Caraman D. V. (VII: 97, 107*), Moscu D. T. (VII; 129), Stoica P. I. (VII: 131).

Clasa VIII-a: Cehan G. A. (VIII: 37, 52*, 53*, 54*), Cristea G. E. (VIII: 39), Maftei M. C. (VIII: 36, 39, 52*), Măgală I. G. (VIII: 39), Radu E. A. (VIII: 36, 39, 42*, 52*, 53*), Surma I. M. (VIII: 39), Zgârcea G. (VIII: 52*, 53*, 54*).

Particulari Cetatea Albă.

Clasa V-a: Mănescu E. N. (V: 140).

Liceul „B. P. Hașdeu" Chișinău.

Clasa V-a: Meculascu T. G. (V: 140).

Liceul militar „Regele Ferdinand" Chișinău.

Clasa V-a: Bălăceanu P. I. (V: 110*, 115*), Burghelea C. (V: 134, 197, 141, 144, 146), Enescu D. A. (V: 110*), Fotolici A. (V: 110*, 123*, 134, 140), Nemțeanu M. (V: 124*), Oanță F. (V: 134, 140, Păntescu C. C. (V: 134, 137*, 140, 162, 169, 170), Soroceanu L. C. (V: 115*, 124*, 125*, 134, 137*, 140), Vițelaru I. (V: 124*, 125*), Zolotovici I. D. (V: 110*, 115*, 124*, 125*, 134, 137*, 138*, 139*, 140, 142, 143, VI: 94, 95, VII: 110).

Seminarul pedagogic universitar Cluj.

Clasa V-a: Esca A. A. (V: 162), Ionescu S. (V: 144), Kauntz I. I. (V: 129).

Clasa VIII-a: Gheorghescu G. C. (VIII: 58).

Liceul „Gh. Barițiu" Cluj.

Clasa VI-a: Nițescu C. G. (VI: 109, 110, 111).

Clasa VII-a: Căpușanu I. (VII: 106*), Cerna I. A. (VII: 131), Cosma I. A. (VII: 94*, 95*, 121, VIII: 18, 20*), Dimitriu C. M. (VII: 94*, 95*, 117*), Gonos A. S. (VII: 107*, 108*, 114*, VIII: 46), Popp A. A. (VII: 116, 118).

Școala normală de învățători Cluj.

Clasa IV-a: Brie I. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116), Câțu D. E. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116), Cotta N. N. (IV: 110, 111, 112, 113), Cuibrus I. (IV: 110, 112, 113), Pop G. I. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116), Popa Șofron (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116), Șipoș G. G. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116).

Clasa V-a: Apostolache T. G. (V: 140), Dobrescu S. (V: 146), Gaspar A. (V: 129, 134), Sava Z. V. (V: 130, 134*), Vasilescu I. I. (V: 134).

Liceul Comrat.

Clasa V-a: Alexandrescu G. P. (V: 134).

Liceul „Mircea cel Bătrân" Constanța.

Clasa VIII-a: Pambucdjian M. K. (VIII: 15*, 28, 52*, 58).

Colegiul național „Carol I" Craiova.

Clasa IV-a: Dinculescu N. M. (IV: 110, 111, 112, 113. 116), Grămescu I. M. (IV: 88*, 90*, 91*, 92*, 94*, 95, 96, 97, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106*, 107*, 110, 111, 112, V: 110*, 113, 114, 115, 116, 117, 124, 125, 129, VI: 105, 110), Mihăiceanu G. R. (IV: 89, 90, 91, 92, 94, 95, 110, 111, 112, 113, 114, 116, V: 140). Popescu I. I. (IV: 94).

Clasa V-a: Cetate Cicein (V: 104, 105, 110*, 113, 115, 119, 124, 125, 126*, 127*, 134, 136*, 137*, 138, 139*, 140), Cumițescu I. G. (V: 120), Germăneanu Dunăre G. (V: 104*, 107. 110*, 113, 117, 130, 132, 140), Popescu D. O. (V: 106*, 110*, 113*, 124*, 125*, 128*, 129), Sgarbură M. (V: 140).

Clasa VII-a: Popescu P. G. (VII: 94, 95, 110. 111, 129).

Clasa VIII-a: Moisovici St. (VIII: 21, 23, 24, 46, 52*).

Liceul „Frații Buzești" Craiova.

Clasa VI-a: Krasniansky M. B. (VI: 130. VII: 130*).

Clasa VIII-a: Amărăștеanu F. M. (VIII: 25, 26, 27, 28).

Liceul militar „D. A. Sturza“ Craiova.

Clasa IV-a: Bădescu F. C. (IV: 92, 94, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 121, 122*, 123, 126*, 128 V: 122), Ciobanu I. V. (IV: 118), Dincă A. S. (IV: 120, 126*), Ionescu A. D. (IV: 126*), Nanu N. B. (IV: 118 126*), Turlesuc P. A. (IV: 94, 110, 112, 116).

Clasa V-a: Cealâc V. S. (V: 140), Ciupag S. H. (V: 140), Corâciu I. M. (V: 129, 140), Enescu D. D. (V: 134, 140). Iordache T. (V: 140), Lupu Gruia (V: 140), Luțescu M. I. (V: 140, VII: 97), Mădan D. I. (V: 129), Manta S. (V: 129, 140), Muraru P. D. (V: 129, 140, 142, 143), Neguți I. N. (V: 140), Nicolae T. (V: 112), Șandru M. G. (V: 140, VII: 97), Șegârceanu E. (V: 140), Sergiu V. C. (V: 142).

Clasa VI-a: Afronie I. (VI: 109, 110, 111, 128, 128 bis, 138, VIII: 39), Bădescu G. N. (VI: 110, 111, 114*, 128, 138, VII: 97, VIII: 39), Berneanu A. (VI: 114*, 124, 131, 138), Bușoiu A. (VI: 131, 138), Cherciu G. (VI: 114*, 131), Cioc I. D. (VI: 117*, 128, 128 bis, 133*, 134*, 135*, 136*, 137*, 138, 140*, VII: 126*, VIII: 39), Damian R. (VI: 113*, 114*, VIII: 21, 23, 24), Drăgușin D. (VI: 110, 111: VIII: 39), Ghidirmic S. (VI: 130, 131, 138), Graur A. (VI: 124, VIII: 21), Grigore M. I. (VI: 124, 128, 128 bis, 138, VIII: 39), Ionescu Fulger M. C. (VI: 113*, 114*, VII: 97), VIII: 21, 23, 24), Lazăr S. S. (VI: 94, 111, 130, VII: 97), Mănoiu C. V. (VI: 124, 130, VII: 97), Pașoiu N. M. (VI: 138), Popescu M. G. (VI: 109. 110, 111, 138 VIII: 39), Slăvuțeanu S. M. (VI: 138, VII: 97, VIII: 39).

Clasa VIII-a: Bălnică F. M. (VIII: 39, 40), Constantinescu Tr. (VIII: 31*, 41), Dinculescu G. N. (VIII: 31*, 39, 41), Dulămiță I. (VIII: 37, 38, 39), Iliescu V. D. (VIII: 46, 48*, 49*, 50*), Micu M. N. (VIII: 41), Roman S. (VIII: 21, 23*), Savin I. (VIII: 26*, 27*, 28*, 41), Teișanu C. S. (VIII: 25*, 27*, 28*, 39, 41), Vasilescu Argetoaia N. (VIII: 21, 22, 23, 24, 39).

Liceul „N. Gane“ Fălticeni.

Clasa V-a: Dimitrov V. C. (V: 110, 134, 137, 139, 140, VI: 118), Gheorghiu M. M. (V: 136*, 137, 139*).

Clasa VI-a: Teskievici M. G. (VI: 118, VII: 97).

Liceul „Unirea“ Focșani.

Clasa V-a: Tustoiu F. (V: 114, 124, 125, 134, 140).

Clasa VI-a: Nadolu T. A. (VI: 94, 96).

Clasa VII-a: Focșeneanu S. (VII: 104, 105 106).

Clasa VIII-a: Kivu C. M. (VIII: 36, 37), Martac R. (VIII: 18).

Liceul „V. Alexandri“ Galați.

Clasa V-a: Dudea G. I. (V: 129*).

Liceul comunității evreilor Galați.

Clasa V-a: Grosman M. H. (V: 134, 140, 162, VI: 111, VIII: 39), Șalovici G. M. (V: 129, 134, 140, 141, VI: 111, Vaisman I. (V: 129), Weisenberg A. M. (V: 140).

Clasa VI-a: Behrman S. M. (VI: 129, 130), Goldberg I. I. (VI: 111, 113*, 114*, 130, 131, 138, 139, VII: 90*, 91*, 114*, VIII: 21, 22, 23), Leibovici M. (VI: 110, 111, 113*, 114*, VII: 90*, 91*).

Liceul „Ion Maiorescu" Giurgiu.

Clasa VI-a: Barbu A. A. (VI: 120*).

Clasa VII-a: Nedelescu N. A. (VII: 111*, 126, 129*, VIII: 21* 23*, 46).

Școala comercială superioară „Brătianu" Hațeg.

Anul II: Nopcea F. A. (V: 124, 144).

Liceul internat Iași.

Clasa V-a: Bedreag C. M. (V: 129).

Clasa VI-a: Andronic M. (V: 110. 111).

Clasa VII-a: Matei D. (VII: 97).

Liceul „Național" Iași.

Clasa VI-a: Huga W. L. (VI: 110, 111), Ionescu M. C. (VI: 109, 110, 111, 112, 124, 126*, 129, 130, 131).

Liceul militar Iași.

Clasa V-a: Bivolaru M. L. V: 110, 113, 115, 125, 127, 129, 134, 135, 139), Ignațiu T. (V: 129, 140), Jipa C. A. (V: 120, 129, 132, 134, 140), Mamut P. (V: 129, 140), Pascaru I. I. (V: 122*, 129, 132, 134, 140), Popovici V. A. (V: 162), Ralea A. V. (VI: 110, 111, 128).

Clasa VI-a: Bârcă G. (VI: 124), Siebiola A. C. (VI: 127).

Clasa VII-a: Bucur N. V. (VII: 113, 114, 115*).

Liceul „C. Brediceanu" Lugoj.

Clasa V-a: Neumann F. F. (V: 140, 144*, VII: 97), Popoviciu T. G. (V: 129, 140), Popoviciu C. M. (V: 113*, 118, 119, 129, 137, 139*, 140, 142, 144*, Gall Zeno (V: 144*).

Clasa VI-a: Sedmik C. V. (VI: 98*), Stamate I. I. (VI: 118*, 120, VII: 110*, VIII: 41*).

Clasa VII-a: Berindei L. T. (VII: 100, 107*, 108*, 114*, 125, VIII: 16), Bord I. L. (VII: 112*).

Liceul „Tasse Dumitrescu“ Mizil.

Clasa IV-a: Angelescu P. G. (IV: 95, 110, 112), Bălănescu I. M. (IV: 110, 111, 112, 113), Diaconu A. C. (IV: 95, 110, 111, 112, 118), Dobre V. (IV: 94, 95, 110, 111, 112), Dobrescu I. G. (IV: 110, 111, 112), Mărășescu M. C. (IV: 110, 111, 112, 113), Mazilu I. I. (IV: 118), Nicolae G. R. (IV: 95, 110, 111, 112), Pană I. I. (IV: 110, 111, 112, 113), Popovici I. C. (IV: 110, 112, 114), Sân-Petru I. T. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116, 117), Stănescu G. N. (IV: 94, 95. 110, 111, 112, 113, 114, 116), Teodorescu T. G. (IV: 110, 111, 112, 113. 114, 116).

Clasa V-a: Botez M. (V: 129, 140), Geambașu V. T. (V: 132, 140), Popescu M. A. (V: 132, 140, VIII: 21, 23).

Liceul „Petru Rareș“ Piatra Neamț.

Clasa IV-a: Soroceanu P. D. (IV: 91, 95, 96).

Clasa VIII-a: Lazaride N. G. (VIII: 21*, 23*. 24*, 27*, 28*, 29*, 30*), Mihăilescu G. P. (VIII: 18).

Liceul „I. Brătianu“ Pitești.

Clasa IV-a: Dumitrescu C. P. (IV: 110, 112).

Clasa V-a: Nicolau H. A. (V: 129, 134, 140).

Liceul „Sf. Petru și Pavel“ Ploești.

Clasa V-a: Nicolescu C. (V: 144, VII: 97, VIII: 21, 22, 23, 24).

Liceul „Regele Ferdinand“ Râmnicul-Sărat.

Clasa IV-a: Alexandrescu M. B. (IV: 94, 95).

Clasa V-a: Oroveanu T. (V: 152*).

Liceul „Roman Vodă“ Roman.

Clasa V-a: Gavrilescu C. (V: 111, 112, 140), Locker I. I. (V: 134, 140), Melinte I. V. (V: 142, 143, VIII: 15).

Clasa VII-a: Rozemberg M. I. (VII: 94, 95, 96).

Liceul „Mihail Eminescu“ Satu-Mare.

Clasa V-a: Gorschi A. (V: 129, 132, 133, 134).

Clasa VII-a: Dâmboianu I. St. (VII: 98*, 99, 121, VIII: 29*, 30*), Șilimon I. I. (VII: 98*, 99*, 112*, 114, 120*, 121).

Clasa VIII-a: Horwath B. (VIII: 36, 37, 39*).

Școala normală „Andrei Șaguna“ Sibiu.

Clasa VI-a: Rășănescu N. I. (VI: 118*, VIII: 21, 23).

Liceul „En. Văcărescu“ Târgoviște.

Clasa IV-a: Agatstein D. E. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 121, 122*, 128, V: 130, 162), Blaier I. P. (IV: 110, 111, 112, 113, 116).

Clasa VII-a: Ion Ilie (VII: 97, VIII: 21, 22, 23).

Clasa VIII-a: Spirescu F. V. (VIII: 18, 31, 36, 37).

Liceul militar „N. Filipescu“ Târgoviște.

Clasa II-a: Crăciunescu I. M. (IV: 108, 110, 111, 112, 113, 115, 118, 119, V: 140, 141*, 142, 143, VI: 124, 130, VIII: 39, 42*).

Clasa IV-a: Anastasiu M. M. (IV: 90, 94, 95, 106, 107, 110, 111, 112, 113, 114, 118, V: 140*, VI: 130), Heroiu N. S. (IV: 106, 107, 110, 111, 112, 113, 118, V: 124*, 126*, 139*, 140*, VI: 115*, 130, VIII: 41*), Nicolescu I. P. (IV: 112).

Clasa V-a: Al. George O. (V: 110, 113, 129, 137, 140), Blaga L. L. (V: 136*, 139*, 140*, Dascălu I, (VIII: 39), Florescu L. V. (V: 137, 139, 140 VII: 112*), Popescu S. (V: 124, 125, 126, 127, 129).

Clasa VI-a: Belloiu B. D. (VI: 130, 139), Negulescu D. S. (VI: 114*, 115*, 116*, 118, 119, 120*, 122*, 127, 129, 133*, 134*, 136*, 138, 139, 140*, 151, VIII: 21, 23, 39, 41*), Nicolau L. (VI: 129, 151).

Clasa VII-a: Daia N. M. (VII: 129*, 130*), Diaconescu M. (VII: 107*, 108*), Marinescu M. E. (VII: 98*, 99*, 107*, 108, 110*, 115*, 126, 129*, 130*), Mazilescu C. (VII: 97, 98, 99, 110), Mușat G. (VII: 98, 99), Niculescu I. G. (VII: 98, 99), Pătru I. (VII: 129*, 130*).

Clasa VIII-a: Dascălu I. (VIII: 26, 27, 28, 29, 30), Lăzăroiu R. (VIII: 32*, 37, 38, 39, 42), Paparizu G. (VIII: 46).

Liceul militar „Mihai Viteazu“ Târgu-Mureș.

Clasa IV-a: Grundorat E. (VIII: 39, 41), Ionescu N. I. (IV: 110, 112, 113), Jareghie V. I. (IV: 113), Militaru P. A. (IV: 95, 106), Mușatescu G. (IV: 110, 112), Neamțu E. (IV: 112, 113), Pop G. I. (IV: 110, 112), Potopeanu N. G. (IV: 110, 112), Rădulescu C. T. (IV: 110, 112, 118), Topolescu G. (IV: 110, 112, 113). Zeveleanu G. G. (IV: 110, 112).

Clasa V-a: Bârzan M. (VIII: 39), Bejenaru G. V. (V: 140), Dimitriu A. P. (V: 129, 140), Iacob A. S. (V: 140), Popescu T. A. (V: 140), Tătaru N. N. (V: 140, 142, 143, VII: 97, VIII: 15).

Clasa VI-a: Bădescu I. I. (VI: 120, 129, VII 115*, VIII: 22, 25, 39), Dalban G. (VI: 120, VII: 97, VIII: 22, 23, 39, 41), Enache I. (VI: 129), Hortopan G. (VI: 136, VIII: 41), Hurezeanu L. C. (VI: 119, 120, 129, VIII: 39), Mosora N. N. (VI: 129, 131), Sechel T. M. (VI: 115, 129, VII: 115), Stancovici V. (VI: 94), Stoina T. (VI: 94, 111), Toma N. N. (VI: 110, 111, 115, 118, 119, 128, 130, 131), Vlaicu V. A. (VI: 129).

Clasa VIII-a: Crișan B. I. (VIII: 46).

Liceul „Ștefan cel Mare“ Tighina.

Clasa VII-a: Țiralis I. D. (VII: 94, 95, 96*, VIII: 18, 20).

Liceul „C. Diaconovici Loga“ Timişoara.

Clasa IV-a: Kaufmann S. I. (IV: 110, 113), Petreanu G. (IV: 110, 112, V: 140), Troceanu M. (IV: 118, 121, 124, V: 113), Vasilescu Stabu A. M. (IV: 102*, 103*, 104*, 105*, 106*, 108*, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, V: 120*, 121*, 122*, 123*, 124*, 125*, 126*, 127*, 128*, 129, 130, 132, 134*, 135*, 136*, 137*, 138*, 139*, 140*, 141*, VI: 115*, 116, 117*, 118*, 119*, 120*, 121*, 122*, 124, 126*, 127, 128*, 129*, VII: 98*, 99*, 100*, 104*, 105, 106*, 107, 108, 110*, 114*, VIII: 18, 25*, 26*, 27*, 28*, 29*, 30*, 39).

Clasa V-a: Ciugudeanu I. C. (V: 134, 140), Nicolau L. M. (V: 120, 130. 134, 140), Rohslich M. A. (V: 134, 140, 141), Stăvrescu G. (V: 231*, 140, 141, 144).

Clasa VI-a: Morariu O. T. (VI: 118, 133*, 134*).

Clasa VII-a: Kornis E. (VII: 131, 133).

Clasa VIII-a: Dimitrievici I. (VIII: 36, 39).

Liceul „Banatia“ Timişoara.

Clasa V-a: Endresz I. (V: 119, 129, 140).

Liceul „Principele Carol“ Tulcea.

Clasa IV-a: Ciurea C. N. (IV: 110, 111), Ianculescu I. E. (IV: 94, 95), Maşca Tibebius-Cocles (IV: 90, 91. 94, 95).

Liceul „Regele Ferdinand“ Turda.

Clasa IV-a: Also A. (IV: 110, 111, 112), Kalman I. A. (IV: 110, 111, 112, 113).

Liceul „Traian“ Turnu-Severin.

Clasa IV-a: Birău G. I. (IV: 94, 95. 107, 134), Boiangiu D. D. (IV: 110, 112, 115), Dumitraşcu I. T. IV: 107), Fragulea M. T. (IV: 94, 95, 107), Grigorovici D. (IV: 110, 111, 112, 113), Petcu G. G. (IV: 118), Scurtu G. P. (IV: 118, 120, 123, V: 137. 162).

Clasa V-a: Coifan S. V. (V: 162*), Florescu I. M. (V: 129), Gărdescu A. I. (V: 113, 114, 115, 117), Ghenea V. G. (V: 140), Mitea C. M. (V: 134, 140), Pavel A. V. (V: 140), Tudora M. M. (V: 140).

Clasa VI-a: Badea I. (VI: 130), Miliţescu E. (VI: 111), Tilică C. St. (VI: 110, 111, 112, 124, 130, VII: 101, VIII: 39).

Fără indicaţie de şcoală:

Clasa IV-a: Buznea D. (IV: 110, 111, 112, 113, 114).

Se atrage din nou atenţia corespondenţilor să reproducă în întregime enunţul exerciţiilor rezolvate, cu numărul de ordine scris exact şi iniţialele propunătorului, pentru a fi mai repede repartizate spre cercetare.

EXERCIȚII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 141.* Se dau polinoamele:

$$P_1 = x + a,\ P_2 = x^2 + ax + 2a^2,\ P_3 = x^3 + ax^2 + 2a^2x + 3a^3$$

$$P_4 = x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + 4a^4$$

Să se calculeze:

$$E = P_4 + ax\,P_3 + 2a^2x^2\,P_2 + 3a^3x^3\,P_1 + 4a^4x^4.$$

C. I. B.

IV. 142. Să se verifice că dacă avem relația:

$$kb^2 = ma + nc$$

avem identitatea:

$$(m + n - bk)^2 \equiv m(m + n + ak - 2bk) + n(m + n + ck - 2b$$

A. A. R.

IV. 143. Un jucător câștigă la clasa patra a loteriei statului 6.000.000 lei, din care i se reține o parte drept taxe. Din ce primește *(neto)*, cumpără o casă, iar din restul rămas după cumpărarea casei depune $\frac{3}{4}$ cu $4^0/_0$ și $\frac{1}{4}$ cu $3{,}5^0/_0$ realizând un venit de 58.125 lei. Se cere să se calculeze prețul casei și sumele depuse cu $4^0/_0$ și $3{,}5^0/_0$, știind că taxele sunt $\frac{13}{2}$ din valoarea casei.

GH. B.

IV. 144. Un trunchiu de piramidă exagonală regulată are aria unei fețe laterale egală cu semisuma ariilor celor două baze. Știind că măsurile laturilor celor două baze sunt a și b, să se calculeze *suprafața laterală* și *volumul trunchiului* de piramidă.

O. N. Ț.

IV. 145. Aceeași problemă pentru cazul când bazele trunchiului sunt pătrate. O. N. Ț.

IV. 146. Aceeași problemă pentru cazul când bazele sunt triunghiuri echilaterale. O. N. Ț.

IV. 147. Un trunchiu de piramidă exagonală regulată are muchia laterală cât suma laturilor celor două baze. Măsurile celor două laturi ale poligoanelor de bază fiind *a* şi *b*, să se calculeze *suprafaţa laterală* şi *volumul* trunchiului de piramidă.

O. N. Ţ.

IV. 148. Aceeaşi problemă (ca precedenta) pentru cazul trunchiului de piramidă regulată cu baza un pătrat.

O. N. Ţ.

IV. 149. Aceeaşi problemă pentru cazul trunchiului de piramidă regulată cu baza un triunghiu echilateral. O. N. Ţ.

IV. 150. Intr'o piramidă exagonală regulată înălţimea unei feţe laterale este cât îndoitul înălţimii piramidei. Măsura înălţimii piramidei fiind *a*, să se calculeze suprafaţa laterală şi volumul piramidei.

O. N. Ţ.

IV. 151. Aceeaşi chestiune pentru piramida regulată pătrată.

O. N. Ţ.

IV. 152. Aceeaşi chestiune pentru piramida regulată cu baza un triunghiu echilateral. O. N. Ţ.

IV. 153. Intr'o piramidă regulată pătrată, înălţimea feţei laterale este egală cu baza ei.

Insemnând cu $2a$ măsura acestei baze, să se calculeze suprafaţa laterală şi volumul piramidei.

O. N. Ţ.

IV. 154. Se dă un plan P şi două puncte A şi B de aceeaşi parte a planului P. Unde trebue să luăm centrul cercului O de raza *r* în planul P astfel ca: 1°. drumul AOB să fie cel mai scurt drum dela A la B din toate de acelaşi fel.

2°. Cum trebue să luăm diametrul $\overline{MN}$ al cercului O pentru ca drumul AMNB să fie cel mai scurt drum din toate drumurile de acelaşi fel.

3°. Să se arate că în acest caz drumul ANMB este cel mai mare din toate drumurile de acelaşi fel.

O. N. Ţ.

IV. 155. Câte berze am văzut şi câte broaşte ţineau ele în gură ?

Când m'am dus, toate berzele stăteau într'un picior şi numărând picioarele lor cu ale broaştelor aflai *18: când să plec* stăteau numai jumătate din berzele de acolo într'un picior şi mâncase o broască şi numărând din nou picioarele lor cu ale broaştelor rămase aflai *17.* O. N. Ţ.

IV. 156. Intr'o clasă de liceu, la lucrarea scrisă, la prima întrebare a profesorului o mulţime de elevi au răspuns. La a doua întrebare numărul celor ce n'au răspuns crescând cu *8,* numărul celor ce n'au răspuns la a doua întrebare a fost *o treime* din numărul celor ce răspunsese la prima întrebare. La a treia întrebare numărul celor ce n'au răspuns a crescut, faţă cu cei ce n'au răspuns la a doua întrebare, cu încă *6,* aşa că numărul celor ce n'au răspuns la a treia întrebare a ajuns la *jumătatea* numărului celor ce au răspuns la prima întrebare.

Câţi elevi erau prezenţi la acea lucrare scrisă şi câţi n'au răspuns la prima întrebare? O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 171.* Să se stabilească identitatea:

$$(x^2+ax+b^2)(x^2+bx+a^2)(x^2-ax+b^2)+$$
$$(x^2-ax+b^2)(x^2-bx+a^2)(x^2+ax+b^2)+$$
$$-(x^2+ax+b^2)(x^2+bx+a^2)(x^2-bx+a^2)$$
$$-(x^2-ax+b^2)(x^2-bx+a^2)(x^2+bx+a^2)$$
$$\equiv 2(b^2-a^2)[a^2b^2+2x^2(a^2+b^2+x^2)].$$

C. I. B.

V. 172. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$(x+a)(x+b)+(x+a)(x+c)+(2x+b+c)^2=0.$$

C. I. B.

V. 173. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$(x+a)(x+b)(x+c)=(x-a)(x-b)(x-c).$$

C. I. B.

V. 174. Se dă triunghiul ABC pentru care $\overline{AB}=10cm$, $\overline{AC}=8$ cm, $\overline{BC}=6$cm. Se consideră punctul D pe latura AB, aşa fel ca $\overline{AD}=2{,}5$cm.

Paralela dusă prin D la BC întâlneşte dreapta AC în punctul E.

Să se arate egalitatea distanţelor punctelor E, B respectiv la dreptele BC, AC. C. I. B.

V. 175. Fie O şi O' centrele a două cercuri secante, având diametrele respectiv 6cm şi 8cm, iar distanţa centrelor de 5*cm*.

Să se afle distanţele unuia din punctele comune la diametrele care trec prin celălalt. C. I. B.

V. 176. Se dă un romb ABCD, ale cărui diagonale sunt:

$$\overline{AC} = 2d_1 \ , \ \overline{BD} = 2d_2 .$$

Picioarele perpendicularelor duse din B, D pe AD, BC sunt E, F, iar picioarele perpendicularelor duse din A, C pe BC, AD sunt G, H.

Să se arate că:

$$\text{aria AGCH} = \frac{2d^3\ d_2}{d_1^2 + d_2^2} \ , \ \text{aria BEDF} = \frac{2d_1\ d_2^3}{d_1^2 + d_2^2} \ .$$

C. I. B.

V. 177. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{ab} + \frac{1}{abc} = \frac{x}{abc} + \frac{y}{cb} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{x}{d} + \frac{y}{db} + \frac{1}{dbc} = \frac{x}{dbc} + \frac{y}{cb} + \frac{1}{c} \ .$$

C. I. B.

V. 178. In triunghiul ABC dreptunghic în A, se prelungeşte cateta AB cu $\overline{AD} = \overline{AC}$; pătratul construit pe $\overline{BD}$ ca latură este echivalent cu pătratul construit pe $\overline{BC}$ plus de patru ori aria triunghiului. Când se ia $\overline{AE} = \overline{AC}$ în spre B, aria pătratului construit pe $\overline{BC}$ este medie aritmetică între aria pătratelor construite pe $\overline{BD}$ şi $\overline{BE}$. N. M.

V. 179. Să se demonstreze că

$$\frac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b+c}} (2bc + b^2 + c^2 - a^2)$$

este pătratul lui $(a + b + c)$. Gh. B.

V. 180. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând unghiul A, baza $\overline{BC}$ şi distanţa HA' dela ortocentru la baza BC.

Gh. B.

V. 181. Pe laturile unui trapez isoscel se construeşte câte un pătrat. Să se demonstreze că dacă suma suprafeţelor patratelor construite pe laturile paralele este egală cu suma suprafeţelor construite pe laturile neparalele, atunci mijloacele laturilor trapezului dat sunt vârfurile unui pătrat şi reciproc. GH. B.

V. 182. Cu centrul în centrul unui pătrat se descrie un cerc care să intercepteze pe laturile pătratului segmente egale cu jumătatea laturei lui. Prin această construcţie se formează un octogon cu patru laturi rectilinii aşternute pe laturile pătratului şi cu patru laturi curbilinii. Se cere să se calculeze suprafaţa acestui octogon în cazul când latura pătratului este egală cu *unu*.

GH. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 153.* Fie S_1 şi S_2 secţiunile obţinute într'o piramidă de bază S, prin plane paralele cu baza şi echidistante de vârf şi de bază.

Avem relaţia:

$$\frac{S_2 - S_1}{S} + 2\sqrt{\frac{S_1}{S}} = 1 .$$ N. M.

VI. 154. Să se restrângă expresia

$$(m+p)\log m - p\,[\log mn - 1] + (n+p)\log n$$

N. M.

VI. 155. Dacă $\log a : \log b = (a : 10)$, atunci

$$\log a \,.\, b = \log a \,.\, \log b .$$

Dacă $a = 10^{\sqrt[\log b]{a}}$ avem şi $b = a^{\log \frac{b}{10}}$.

N. M.

VI. 156. Să se calculeze suma:

$$(1-a^2)^n + (1-a^2)^{n-1}(1+a) + (1-a^2)^{n-2}(1+a)^2 + \ldots (1-a^2)(1+a)^{n-1} + (1+a)^n .$$

C. I. B.

VI. 157. Dacă $\sin x = \frac{1}{\operatorname{tg} y}$

x şi y fiind arce în primul cadran, există şi egalitatea

$$\cos(x+y) = \sqrt{\cos^2 x + \cos 2y} - \cos y .$$

C. I. B.

VI. 158. Să se stabilească identitatea:

$$1 + \sin 2x = \sin 2x \cos 2x + \cos 2x + 4\sin^2 x \sin^2 (x + 45^0).$$

N. M.

VI. 159. Intr'un triunghiu dreptunghiu avem:

$$\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = \frac{(a+b)(a+c)}{2a(a+b+c)}.$$

N. M.

IV. 160. Să se rezolve sistemul de ecuațiuni:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{y + 2\sqrt{y}}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \sqrt{y - 2\sqrt{y}}.$$

GH. B.

VI. 161. Să se stabilească identitatea:

$$\sin 2\alpha (\cos\alpha + \sin 2\alpha)(\cos\alpha + \sin^2\alpha)$$
$$\equiv \cos^2\alpha (1 + 2\sin\alpha)(\sin 2\alpha + 2\sin^3\alpha).$$

C. I. Ț.

VI. 162. Dacă $A + B + C = 180^0$, avem relația:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma \cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{4}\sin\frac{B}{4}\sin\frac{C}{4} + \cos\frac{A}{4}\cdot\cos\frac{B}{4}\cdot\cos\frac{C}{4} +$$
$$+ \Sigma \cos\frac{A}{4}\sin\frac{B}{4}\sin\frac{C}{4} + \Sigma \sin\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{4} = 0.$$

C. I. Ț.

Clasa VII-a. *Exerc. 144.* Să se cerceteze pentru $p > 2$ natura seriei al cărei termen general este

$$u_n = \left(\frac{an - b}{an + b}\right)^{n^p}.$$

C. I. B.

VII. 145. La ce înălțime ar trebui să se ridice un balon, pentru a se putea privi un sfert din suprafața pământului?

C. I. B.

VII. 146. Să se demostreze că suma

$$(a^2 + b^2)^8 + (a^2 - b^2)^8 + (2ab)^8$$

este egală cu dublul sumei

$$(a^4 - b^4)^4 + (2ab)\,[(a^2 + b^2)^4 + (a^2 - b^2)^4],$$

oricare ar fi a și b.

GH. B.

VII. 147. Să se extragă rădăcina cubică din

$$x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1$$

care este un cub perfect. GH. B.

VII. 148. S_{n-1} fiind suma primilor n termeni, obținuți, din seria e^x, înlocuind termenii prin inverșii lor.

Să se arate că

$$\frac{e^x}{x} S_{n-1} = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{n!}{x^n}\right).$$ N. M.

VII. 149. Care este adevărata valoare a expresiei

$$\lim_{x \to 0} [\cos x + x \mathrm{L}(ax^2 + bx + 1)]^{\frac{1}{x \sin x}}.$$

G. D. S.

VII. 150. Să se calculeze adevărata valoare a expresiei

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{a \sin x} - ax - 1}{x \sin x}.$$ G. D. S.

VII. 151. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x + 4y + \lambda z - 1 = 0 \\ -2x + \lambda y + 3z + 2 = 0 \\ \lambda x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Să se determine λ astfel ca să obținem un sistem de ecuațiuni al cărui sistem de soluțiuni să dea valoarea cea mai mare pe care o poate avea x.

Să se rezolve complet sistemul în acest caz. O. N. Ț.

VII. 152. Să se determine parametrii λ și μ, legați prin relațiunea: $$a\lambda + b\mu + c = 0 \quad (1)$$ astfel ca sistemul de soluțiuni, ale sistemului de ecuațiuni:

$$\begin{cases} 3ax + \lambda y - 2az + c = 0 \\ -\mu x + by + \mu z + d = 0 \\ -3ax + \lambda y + 4az = 0, \end{cases} \quad (2)$$

să conțină cele mai mari valori posibile pentru x și z.

Care este intervalul în care trebue să varieze μ pentru ca sistemul de soluțiuni să conțină cele mai mari valori posibile pentru x, y și z?

Discuțiune. O. N. Ț.

VII. 153. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 4x \sin^4\varphi + y - \varphi = 0 \\ x + 4\cos^4\varphi \cdot y - \dfrac{\pi}{4} = 0 \end{cases}$$

şi să se găsească către ce valori tind x şi y la limită când unghiul φ tinde către valoarea $\frac{\pi}{4}$, valoare pentru care sistemul este nedeterminat. O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 76.* Dacă ecuaţia

$$x^6 - 14x^4 + 62x^2 + \lambda = 0$$

admite rădăcina

$$x = \sqrt{5 + \sqrt{3}},$$

atunci ea admite toate rădăcinile ecuaţiei:

$$x^4 - 10x^2 + 22 = 0. \qquad \text{N. M.}$$

VIII. 77. Punctele $(0, \pm 2)$ şi $\left(1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil. O dreaptă oarecare trecând prin originea O a axelor de coordonate, taie cercul circumscris în A şi B şi pe dreapta $x = 8$ în D. Diviziunea (A, O, B, D) este armonică.

N. M.

VIII. 78. Pe două drepte perpendiculare în O, se ia punctele P şi Q, se poartă pe OP, lungimile $\overline{OR} = \overline{OS} = \overline{OQ}$, pe perpendiculara în Q pe PQ şi opus lui O, se ia $\overline{QT} = \overline{QP}$, PT taie pe OQ în U. Segmentul OU este a patra proporţională între $\overline{PR}$, $\overline{PS}$, $\overline{PO}$.

N. M.

VIII. 79. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$8x^4 - 30x^3 + 35x^2 - 15x + 2 = 0$$

ştiind că rădăcinile sunt în progresie geometrică.

A. A. R.

VIII. 80. Se dă ecuaţiunea:

$$A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0.$$

Să se scrie o ecuaţiune care să aibă rădăcinile de patru ori mai mari decât rădăcinile ecuaţiei date. A. A. R.

VIII. 81. Să se determine p şi să se rezolve ecuaţia

$$x^3 + px^2 - x + 2 = 0$$

ştiind că are două rădăcini egale şi de semne contrarii.

A. A. R.

VIII. 82. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0$$

ştiind că produsul a două rădăcini este egal cu -1.

A. A. R.

VIII. 83. Să se rezolve ecuaţia

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

ştiind că suma a două rădăcini este egală cu zero.

A. A. R.

VIII. 84. Să se determine a şi să se rezolve ecuaţiunea

$$x^4 - 10^3 + 35x^2 - 50x + a = 0$$

ştiind că rădăcinile sunt în progresie aritmetică.

A. A. R.

VIII. 85. Să se discute ecuaţiunea

$$2x^3 - 9x^2 + 12x + \alpha = 0$$

când α variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

A. A. R.

VIII. 86. Să se rezolve ecuaţiunea

$$x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$$

ştiind că admite rădăcina $1 + i$.

A. A. R.

VIII. 87. Să se rezolve ecuaţiunile

$$3x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0$$

$$3x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = 0$$

ştiind că admit rădăcini comune.

A. A. R.

VIII. 88. Să se calculeze integrala:

$$I = \int (3x + 2)\,(2x + 3)\,dx.$$

A. A. R.

VIII. 89. Să se calculeze integrala:

$$I = \int \frac{(x - 1)\,dx}{(2x + 3)\,(3x + 2)}.$$

A. A. R.

VIII. 90. Să se calculeze derivata funcţiunii:

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}.$$

A. A. R.

ERATĂ. La exerciţiul 132 pentru clasa VI-a, pag. 106 se va înlocui $4\cos^2 2a$ prin $4\operatorname{cosec}^2 2a$.

Soluţiunile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului şi se redactează după „Instrucţiunile“ publicate în Nr. 1, pag. 24.

Elevii din clasele VI, VII şi VIII cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii soluţionând probleme din „Gazeta Matematică“.

„Gazeta Matematică“ apare la 15 al fiecărei luni. Costul abonamentului este 200 lei şi se trimite la „Casa Gazeta Matematică“ Calea Griviţei 158 — Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate „Societăţii Gazeta Matematică“.

Dr. 8-

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL II. No. 8 — 1 MAI 1936

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa V-a. *Exerc. 128. Să se stabilească identitatea:*

$$[(a+b)^2+(c+d)^2]\,[(a-b)^2+(c-d)^2]-[(a+d)^2+(b+c)^2]$$
$$[(a-d)^2+(b-c)^2]\equiv 4\,(a+c)\,(b+d)\,(a-c)\,(d-b).$$

C. I. B.

Soluţia I.

Se înlocueşte în membrul I al identităţii a cu $-c$, se obţine O. Deci această expresie E, se divide cu $a+c$. Făcând apoi pe rând $b=-d$, $a=c$, $d=b$ se constată divizibilitatea prin $(b+d)$, $(a-c)$, $(d-b)$. Cum E este gradul IV,

$$E=k\,(a+c)\,(b+d)\,(a-c)\,(d-b)$$

punând $a=1$, $b=1$, $c=0$, $d=0$, se găseşte $k=4$.

Soluţia II: Considerăm identitatea lui LAGRANGE

$$(\alpha^2+\beta^2)\,(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2.$$

Dacă

$$\alpha=a+b\ ,\ \beta=c+d\ ,\ x=a-b\ ,\ y=c-d,$$

$$[(a+b)^2+(c+d)^2]\,[(a-b)^2+(c-d)^2]$$
$$=[a^2-b^2+c^2-d^2]^2+4\,[bc-ad]^2. \qquad (1)$$

Dacă

$$\alpha = a + d\ ,\ \beta = b + c\ ,\ x = a - d\ ,\ y = b - c,$$

$$[(a+d)^2 + (b+c)^2]\,[(a-d)^2 + (b-c)^2]$$

$$= (a^2 - d^2 + b^2 - c^2)^2 + 4\,(db - ac)^2\ . \qquad (2)$$

Scăzând egalitățile (1) și (2) se obține identitate cerută.

V. 131. Peste un canal cu malurile paralele să se construiască un pod PP′, *care să fie văzut sub* 45^0 *din un observator* O. *Discuții asupra pozițiilor lui* O, *ca construcția să fie posibilă.*

GH. B.

Fie Δ_1, Δ_2 drepte paralele, care reprezintă malurile, și Δ o dreaptă care trece prin mijlocul distanței între precedentele și e paralelă cu ele. Podul PP′ e perpendicular pe maluri și fiindcă $\sphericalangle$ POP′ este 45^0, latura $PP' = a$, este latura unui pătrat înscris în un un cerc O′ de rază

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}\ .$$

Centrul O′ al acelui cerc se găsește la intersecția lui Δ cu un cerc de rază R și cu centrul în O. Odată construit O′, intersecțiile lui cu Δ_1, Δ_2 dau pe PP′. Avem 4, 2 sau 0 soluțiuni.

Dacă d este distanța dela O la cea mai apropiată din dreptele Δ_1, Δ_2, condițiile de posibilitate sunt:

$$d + \frac{a}{2} \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\ d \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\,a.$$

Când O este între Δ_1, Δ_2, pe o insulă, problema este totdeauna posibilă.

Dacă PP′ nu-i perpendiculară pe maluri, problema se rezolvă la fel numai că atunci Δ nu mai trece prin mijlocul distanței între Δ_1, Δ_2.

V. 135. Să se construiască un triunghiu ABC *cunoscând unghiul pe care-l face latura* BC *cu diametrul* AO *al cercului circumscris, latura* AB *și distanța dela piciorul bisectoarei* AA′ *la* AO. GH. B.

Fie A'D distanța dela A' la AO și AH înălțimea ce pleacă din A. Conform exercițiilor 86 și 87 pentru clasa IV-a, AA' este bisectoarea unghiului DAH. Deci

$$A'D = A'H$$

și problema se reduce la exercițiul 109 pentru clasa V-a.

Răspuns Exerc. VII. 94. An. II.

$T_1(x) \equiv x^4 + 13x^2 + 36 \equiv (x^2 + 4)(x^2 + 9) > 0$ pentru orice valoare de x.

$T_2(x) \equiv (x^2 - 4)(x^2 - 9) \equiv (x + 3)(x + 2)(x - 2)(x - 3)$.

Avem :

pentru $x < -3$, $T_2(x) > 0$

» $-3 < x < -2$, $T_2(x) < 0$

» $-2 < x < +2$, $T_2(x) > 0$

» $+2 < x < +3$, $T_2(x) < 0$

» $+3 < x$, $T_2(x) > 0$

; de unde rezultă că funcțiunea există pentru intervalele de valori, ale variabilei x, următoare :

$(-\infty, -3)$; $(-2, +2)$; $(+3, +\infty)$.

O. N. Ț.

Răspuns Exerc. VII. 95. An. II.

Avem :

$T_1(x) \equiv x^4 - 16 \equiv (x^2 + 4)(x^2 - 4) \equiv (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

$T_2(x) \equiv x^6 - 1 \equiv (x^3 + 1)(x^3 - 1) \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
$(x + 1)(x - 1)$.

Insă, după legea semnului trinomului, avem pentru orice valoare de x.

$(x^2 + 4) > 0$; $(x^2 + x + 1) > 0$; $(x^2 - x + 1) > 0$.

Deci, $\frac{T_1(x)}{T_2(x)}$ fiind pozitiv în același timp cu $[T_1(x) \cdot T_2 x)]$, adică, când

$$T(x) \equiv (x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

este pozitiv; ceeace are loc pentru intervalele :

$$(-\infty, -2) \; ; \; (-1, +1) \; ; \; (+2, +\infty)$$

și acesta este domeniul de existență al funcțiunii y.

O. N. Ț.

Până la 10 Aprilie s'a primit soluțiuni bune pentru exercițiile publicate în numerele 4, 5, 6 și 7 dela [1]):

Școala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu" București.

Clasa V-a: Nicolau A. Elena (V: 100, VI: 114), Popescu Irina (V: 100).

Clasa VI-a: Lupu N. Maria (VI: 128, 147), Romașcan G. Georgetta (VI: 123, 128, 129, 131, 134*, 136*, 139, 143, 144, 147, 151, 152, 153, 158*, 159, 161*, VII: 102*, 103*, 110*, 121, VIII: 39, 40), Stănescu N. Virginia (VI: 113*, 114*, 142, VII: 102, 103), Trofin I. Aurora (VI: 129).

Clasa VII-a: Conea Lucreția (VII: 102, 103), Gilorteanu Adina (VII: 102, 103), Sofronescu E. (VII: 102, 103), Sotir Elena (VII: 102, 103).

Liceul de fete „Regina Maria" București.

Clasa IV-a: Cohn Lydia (V: 100), Dan Aurora (IV: 110, 111, 112, 113), Paladescu Cristina (IV: 127*, 128*), Șerbănescu Viorica (IV: 121, 123*, 126*, V: 142, 166*, VII: 102).

Clasa VI-a: Iacoby Marcela (VI: 123).

Liceul de fete „Carmen Sylva" București.

Clasa IV-a: Constantinescu D. Paula (IV: 108*, 110, 113, 118, 126*, 135, 140), Halman C. Eugenia (IV: 110, 113, 118), Mayer B. Silvia (IV 131), Mușat I. Alexandrina (IV: 110, 111, 112, 113, 116, 118, 120*, 126*), Niculescu C. Paula Anna (IV: 110, 111, 112, 113, V: 140), Nissim L. Mioara (IV: 108*, 111, 112, 113, 114, 116, 131*, 132*, 139*, 140, V: 140), Pinsler L. Fani (IV: 108*, 114, 134*, 140, 155, 156), Renert Etty Tica (IV: 134*, 140), Walter Stelli (IV: 110, 111, 112, 113, 116).

Clasa VI-a: Gabrielescu Aristița (VI: 147).

Clasa VII-a: Petrov E. Elena (VII: 119, 129*, 130*, 137, 138, VIII: 75)

Liceul de fete „Domnița Ileana" București.

Clasa V-a: Bădulescu V. Viorica (V: 100, 129, 144*, 157, 159, 160 168, 169, 170, VII: 102, 103, VIII: 39), Catulescu D. Angela (V: 147*, 160), Crăciun A. Aurelia (V: 140, 141, 144, 146*, 148*, 162, 169, 170, VIII: 39), Goldenberg I. Henriette (V: 134, 137*, 138*, 140, 144, 148*, 150*, VII: 102, 103, VIII: 39), Ionescu C. Mariana (V: 134, 140, 144*).

Institutul „Moteanu" București.

Clasa IV-a: Munroe M. Manuela (IV: 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116).

Externatul ortodox „Zoe Romniceanu" București.

Clasa IV-a: Oancea Ileana (IV: 111, V: 122), Plăviţescu N. Clementa (IV: 106, 107).

Clasa VII: Rociu I. Margareta (VII: 134*).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.

Institutul de fete „Bolintineanu“ București.

Clasa IV-a: Onigu D. Theodora (IV: 110, 111, 112, 113), Slomnescu Dinah (IV: 109, 110, 111, 112, 113.

Clasa V-a: Dinulescu Sofica (V: 140, 141).

Liceul de fete „Iulia Hașdeu“ București.

Clasa VIII-a: Stratilescu P. V. (VIII: 60, 61, 62, 63, 64, 65, 75).

Liceul de fete „Aurel Vlaicu“ București.

Clasa IV-a: Buzescu P. Georgeta Claudia (IV: 113, 114, 116).

Clasa V-a: Popescu Valentina (V: 159, 160), Stoicescu E. Elena (V: 140, 144).

Clasa VIII-a: Popescu Jana (VIII: 31*, 36, 39, 52*, 60, 61, 62, 63*, 64*, 65*, 66*, 72).

Liceul de fete „Eliade Rădulescu“ București.

Clasa V-a: Copaci Cornelia (V: 149, 160).

Liceul de fete Bacău.

Clasa IV-a: Papadopol Elena (IV: 110, 112).

Liceul de fete „Dr. C. Angelescu“ Buzău.

Clasa III-a: Leonescu E. Gabriela (V: 130).

Clasa V-a: Ionescu Maria (V: 100, 134, 140, 144), Leonescu Magdalena (V: 144), Stancu A. Silvia (V: 128, 129, 140), Stoicescu Viorica (V: 129, 141, 144).

Clasa VIII-a: Ionescu Filofteia (VIII: 51, 52*, 60, 61, 62, 65)

Liceul de fete Caracal.

Clasa VI-a: Musceleanu Ileana (VII: 102, 103.

Liceul de fete „Ecaterina Urziceanu“ Craiova.

Clasa VII-a: Vlădescu Yvonne (VII: 102, 103).

Liceul de fete „Mihail Kogălniceanu“ Galați.

Clasa VII-a: Grigoriu D. Aurora (VII: 107*, 108*, 115*, 116, 117 118, 120, 132).

Clasa VIII-a: Burdescu Maria (VIII: 60, 62, 63, 64, 75), Finkelstein C. (VIII: 60, 62, 63, 64, 65, 72, 75, 82, 83, 85, 86, 88, 90, Isbășoiu M. Marga (VIII: 46, 51, 60, 61, 62, 63, 65, 75).

Liceul de fete „Oltea Doamna“ Iași.

Clasa III-a: Strișca Yvonne-Consuela (IV: 141, 142).

Clasa V-a: Strișca Lygia (V: 159, 160, 161).

Gimnaziul de fete Roșiori de Vede.

Clasa IV-a: Neguș I. Ana (IV: 94, 110, 112, 113, 121, 122, 132).

Şcoala normală de fete „Andrei Şaguna“ Sibiu.

Clasa V-a: Ivan Maria (V: 134, 140).

Liceul de fete „Carabella“ Târgovişte.

Clasa IV-a: Diaconescu A. Ecaterina (IV: 111, 124), Dumitrescu A. Elena (IV: 110, 111, 112, 113), Neagoe N. Cezarina (IV: 95, 110, 111, 112, 113), Popescu A. Cornelia (IV: 110), Spălăţeanu I. Stela (IV: 110, 111, 112, 113).

Clasa VII-a: Macedonescu St. Irina (VII: 135, 136, 137, 138, 141).

Liceul de fete „Carmen Sylva“ Timişoara.

Clasa IV-a: Checian Ana (IV: 109), Domonkos Erika (IV: 109).

Clasa VII-a: Guttmann Prisca (VII: 138, VIII: 18).

Liceul de fete „Principesa Elena“ Turnu-Severin.

Clasa V-a: Moşteoru Sylvia (V: 100), Petcoff Arida (V: 100, 129, 144*).

Liceul „Spiru Haret“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Dailis A. (IV: 109), Marinescu A. (IV: 110, 111, 112, 116), Şeibulescu C. (IV: 106, 124*).

Clasa V-a: Cernovodeanu I. I. (V: 134, 140, 159*, 160*, 162), Stănculescu M. (V: 100, 122, 129, 130, 134, 136*, 137*, 138, 139*, 140, 141, 162, VII: 102, 110*, 121, VIII: 41*, 75).

Clasa VI-a: Chiriceanu M. A. (VI: 133, 143, 147, 151).

Clasa VII-a: Angelescu I. C. (VII: 133, 135, 137, 138, 139, 140, VIII: 60, 61, 63, 64), Druţu N. T. (VII: 102, 103, 107*, 108*, 114*), Solavici M. (VII: 102, 103).

Clasa VIII-a: Iotzu C. A. (VIII: 39, 40, 41, 51*, 52*, 60, 61, 63, 64*, 65, 68, 69, 70, 71, 75, 76*), Moscuna I. O. (VIII: 36, 37, 39), Teodoreanu D. VIII: 43, 44).

Liceul „Gh. Lazăr“ Bucureşti.

Clasa V-a: Anghelescu V. E. (V: 100*, 134, 140, 141, 144, VII: 103, VIII: 21, 23), Căţoiu S. S. (V: 152*, 153, 154*, 159, 160, 161, 162, 163*, 164*, 165*, 167*, 169, 170).

Clasa VI-a: Drouhet E. E. (VI: 129, 147, 148, 151, VII: 103), Popescu A. M. (VI: 134*, 137, 149, 151, VIII: 39), Popescu F. M. (VI: 143), Rădulescu M. M. (V: 100, 111*, 112, 162, 163), Segal B. (VII: 118).

Clasa VII-a: Ballan A. M. (VII: 107, 108, 110*, 112, 114*), Decuseară N. (VII: 102), Drăghicescu F. M. (VII: 102, 103, 107*, 108*, 110*, 112*, 114*, 115*), Leonida M. B. (VII: 102, 103).

Liceul „Sf. Iosif“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Adrian G. C. (IV: 110, 112, 135), Bente V. G. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116, 120*, 121), Bobina G. S. (IV: 110, 135, 140), Lenart I. A. (IV: 122, 135), Niculescu C. E. (IV: 113, 116), Romalo O. (IV: 110, 135), Theodoroff A. S. (IV: 120*, 121, 135), Tomasini G. I. (IV: 111, 112, 135, 140).

Clasa V-a: Geller M. (V: 100), Mazzetti L. F. (V: 100, 120, 122).
Clasa VI-a: Popescu-Zorică N. A. (IV: 158, 161*).

Institutul „Schewitz Thierrin" Bucureşti.

Clasa IV-a: Anton S. A. (IV: 134, 135), Lucaciu N. T. (IV: 110, 111, 112, 114), Mihăilescu L. V. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, V: 140).
Clasa VI-a: Ghica N. P. (VI: 143, 144), Mihăilescu L. A. (VI: 123. 142, 143, 144, 147), Slomneanu I. I. (VII: 123, 143, 144, 147), Storfer R. (VI: 142), Teodorescu N. (VII: 102), Ulivi L. (VII: 102, 103, 143, 144).

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa IV-a: Woinarosky O. G. (IV: 104*, 111, 112, 113).
Clasa VI-a: Preciado I. T. (VI: 127, 129, 131, 138, 139), Şiachin O. A. (VI: 138).

Liceul C. F. R. „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa V-a: Dimitriu G. (V: 159, 160), Fulga L. T. (V: 140), Georgescu N. C. (V: 140, 141, 161, 162, 168), Horwath S. (V: 100, VII: 103), Stoicescu C. (V: 144, 159, 160, 162, 163, 166*, VII: 102, 103, VIII: 39).
Clasa VI-a: Ştefănică N. C. (VI: 143).
Clasa VII-a: Buzescu P. V. (VII: 120, 133, 134*).
Clasa VIII-a: Dimitriu St. T. (VIII: 36, 39, 52*, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66*, 67, 72, 75*), Marinescu Şt. Şt. (VIII: 39, 52*, 53*, 54*, 72).

Colegiul naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa V-a: Ciurescu R. (V: 100, 140, 141, 142, 143, 159, 160, 162, 163, 165), Yicmon S. (V: 159, 162).
Clasa VI-a: Stroescu M. (138).

Liceul „Cantemir Vodă" Bucureşti.

Clasa VII-a: Dinescu R. (VII: 102, 103).

Liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti.

Clasa V-a: Constantinescu V. C. (V: 100, 144, 159, 160, 162, VII: 102, 103).
Clasa VI-a: Rauch L. I. (VI: 124, 144).

Liceul „Gh. Şincai" Bucureşti.

Clasa V-a: Cetăţeanu G. St. (V: 120, 136).

Liceul „Sf. Andrei" Bucureşti.

Clasa VI-a: Mateescu A. I. (VI: 143, 147, 148).
Clasa VIII-a: Bendorf A. G. (VIII: 25*).

Liceul „Marele Voevod Mihai" Bucureşti.

Clasa V-a: Schwartz I. (V: 134).
Clasa VIII-a: Goldenberg M. (VIII: 68, 69, 70, 71, 73, 75).

Seminarul Pedagogic Universitar „Titu Maiorescu" București.

Clasa V-a: Bodnărescu M. H. (V: 100, 136*, 137*, 138*, 139*, 140, 141, 142*, 143*, VII: 107, 110*, 111*, 121).

Clasa VI-a: Linaru N. N. (VI: 142).

Liceul „Mihail Eminescu" București.

Clasa VI-a: Bădulescu V. V. (VI: 143, 144, 147, 148, 154, 158).

Liceul „Ion Creangă" Bălți.

Clasa VII-a: Repetur D. S. (VII: 102, 103, 106, 107, 131, VIII: 33, 34, 35, 75).

Liceul „Codreanu" Bârlad.

Clasa IV-a: Pavelescu V. D. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 128*, 140).

Clasa V-a: Toporaș St. P. (V: 140, 146, 148).

Clasa VII-a: Enăcache B. (VII: 102, 103), Spanache I. (VII: 102, 103).

Clasa VIII-a: Ivănescu I. (VIII: 34).

Liceul „Samuil Vulcan" Beiuș.

Clasa V-a: Ardeleanu V. A. (V: 120, 144*, 159, 160, 161, 162, 169, VIII: 51*, 52*, 62, 65, 75), Jidanu I. C. (V: 100, 143, 144, 159, 160, 169, 170, VIII: 60*, 62*, 75), Moș T. (V: 134, 142, 159, 160, 162, 169, 170).

Clasa VI-a: Hera V. I. (VI: 123, 148).

Clasa VII-a: Chirvai I. V. (VII: 102, 103, 131, 133, VIII: 72, 75, 79*, 81, 82, 83, 87*, 90), Marica P. (VII: 102, 103, 122*, 131, 132, 133, 135, 136, 137, 138, 139, VIII: 75, Tiberiu Hompola (VII: 107, 108, 114*, 120*).

Liceul „Sf. Vasile" Blaj.

Cojocaru M. (VII: 102 103).

Liceul „Laurian" Botoșani.

Clasa V-a: Ciomaga L. (V: 140).

Școala comercială superioară Brăila.

Clasa I-a: Burtea M. St. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116), Ciulav-Bărbulescu G. (IV: 110) Dumitriu G. N, (IV: 95, 110, 111, 112, 113, 116), Grünberg Z. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116), Mironovici O. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116), Popârlan G. S. (IV: 110, 111, 112, 113, 116), Popescu P. D. (IV: 112, 112, 114), Sofonea S. M. (IV: 110, 111, 112, 113, 114), Stăncescu N. G. (IV: 113, 114, 116), Voinescu D. G. (IV: 110, 112, 114, 116).

Liceul „Andrei Şaguna“ Braşov.

Clasa IV-a: Demu D. (IV: 110, 111, 112, 113), Nan G. O. (IV: 110, 111, 112), Zăvoianu I. M. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116, 117, 118).

Clasa VIII-a: Savu N. I. (VIII: 37, 39, 62, 64), Ticuşan I. M. (VIII: 31*, 39, 60, 61, 62, 63, 64, 68, 69, 70, 71, 75).

Liceul „Ioniţă Asan“ Caracal.

Clasa VIII-a: Cârstea M. M. (VIII: 46, 52*, 53, 62), Clipea I. (VIII: 38, 39, 40, 52*, 53, 60, 61, 62, 63, 65, 68, 69, 75), Dumitrescu I. T. (VIII: 36, 37, 52*, 60, 61, 62), Dumitru F. (VIII: 52*, 53), Florea L. D. (VIII: 31*, 60, 61, 62, 65, 68, 69, 75, 83), Ilie D. I. (VIII: 36, 37, 38, 39), Uciu I. A. (VIII: 36, 37).

Liceul „Traian Doda“ Caransebeş.

Clasa VIII-a: Stana D. R. (VIII: 62, 66, 75), Stănescu D. C. (VIII: 66).

Liceul „V. Lucaciu“ Carei.

Clasa VIII-a: Popoviciu I. G. (VIII: 31*, 32, 36, 39, 42).

Liceul Dinicu Golescu“ Câmpulung Muscel.

Clasa VIII-a: Popescu V. F. (VIII: 39, 60, 61, 62, 63, 75*).

Liceul „Dragoş-Vodă“ Câmpulung Bucovina.

Clasa V-a: Corlăţan Şt. L. (V: 140, 144, 159*, 160*, 162).

Liceul „Ortodox de băieţi“ Cernăuţi.

Clasa VII-a: Brăileanu T. M. (VII: 118), Bretcanu C. C. (VII: 118, 137), Cherner E. E. (VII: 107*, 108*, 109*, 116, 118, VIII: 36, 39), Clain D. (VII: 107, 108, 116, 118, 121, 131), Flohr H. S. (VII: 108, 109*, 116, 117, 118, 120, 121, VIII: 31, 36, 38, 39, 42*), Goichmann S. (VII: 118), Mendel E. T. (VII: 107*, 108*, 109, 116, 117, 121, VIII: 39, 43*, 44), Popovschi V. (VII: 116, 118), Rolant M. F. (VII: 107, 108*, 109*, 116, 118, VIII: 39), Roman I. G. (VII: 118), Roman V. H. (VII: 133). Rudich A. C. (VII: 107, 108, 109*, 116, 117, 118, 120, 121), Săveanu L. (VII: 118), Voronca D. L. (VII: 107*, 108*, 131*, VIII: 36, 42).

Şcoala de conductori şi desenatori Arhitecţi Cernăuţi.

Anul II. Ball I. (V: 153, VI: 123, VII: 103), Galeriu V. (V: 135, 159, 160, 161, VII: 102, 103, VIII: 42), Horwath T. (V: 160), Scutaru I. (V 135, VI: 123, VII: 103), Ursu P. (VIII: 39).

Gimnaziul „Miron Costin“ Cernăuţi.

Clasa VII-a: Mark A. M. (VII: 116, 135, 137, VIII: 31*).

Seminarul pedagogic universitar Cluj.

Clasa V-a: Borza A. (V: 100, 122, 130, 134), Esca A. (V: 100, 140), Florian S. (100, Ionescu T. S. (V: 100, 146, 169, 170), Văianu T. (V: 100).

Clasa VII-a: Gheorghescu G. C. VII: 135, 136, 137, VIII: 18).

Liceul „Gh. Barițiu" Cluj.

Clasa VII-a: Cosma I. A. (VII: 102, 107*, 108*, 114*, 115*, 116, 118, 120, 122*), Dumitriu M. (VII: 102), Klärmann B. F. (VII: 102, 103, 107*, 108*, 116, 117, 118).

Școala normală de învățători Cluj.

Clasa IV-a: Anca N. N. (IV: 109, 110, 111, 112, 113, 114, 116, V: 130, 134, 140), Brie I. (IV: 109, V: 130, 134, 140), Câțu E. (IV: 109). Cotta N. (IV: 109), Cuibrus I. I. (IV: 109, V: 134, 140), Pop G. I. (IV: 109, V: 130, 134, 140), Popa S. S. (IV: 109, V: 130, 134, 140), Purcaru A. A. (V: 130, 134, 140), Șipoș G. G. (IV: 109, V: 130, 134, 140),

Clasa V-a: Dobrescu S. (V: 112*, 134, 140), Gașpar A. (V: 140), Zeno S. (V: 140).

Liceul „Mircea cel Bătrân" Constanța.

Clasa VIII-a: Pambucdjian K. (VIII: 18, 35, 36, 37, 39*, 46, 53*, 60, 62, 63, 64, 68, 69, 70, 71, 75*, 80*, 81*, 82*, 83*, 85*, 86.

Colegiul Național „Carol I" Craiova.

Clasa IV-a: Mihăiceanu G. R. (IV: 140, V: 157), Popescu I. I. (IV: 110, 112, 113, 16).

Clasa V-a: Cetate Ciceiu (V: 100), Cumițescu I. G (V: 101, 112, 129, 162), Georgăneanu D. G. (V: 200), Popescu D. O. (V: 100, 120, 122, 129).

Clasa VII-a: Popescu P. G. (VII: 102, 103, 131*, 135, 136, 138, VII: 65, 86, 90).

Liceul „Frații Buzești" Craiova.

Clasa VI-a: Krasnianschy M. B. (VII: 133, 134).

Liceul „N. Gane" Fălticeni.

Clasa V-a: Dimitrov G. (V: 162, 163, VII: 102), Gheorghiu M. M. (V: 134, 140, 141), Irimescu S. D. (V: 100, 140).

Clasa VI-a: Teșchievici M. G. (VI: 123*, 129*, 133*, 134*, 135*, 136*, 143, VII: 102*, 103*, VIII: 46).

Liceul „Unirea" Focșani.

Clasa V-a: Turtoiu F. (V: 134, 140, 159, 160).

Clasa VII-a: Focșeneanu S. (VII: 102, 103).

Clasa VIII-a: Rivu C. M. (VIII: 42, 51*, 52*, 53*, 54*, 60, 61, 62, 63, 64*, 65, 68, 69, 70, 71, 75).

Liceul „V. Alexandri" Galați.

Clasa V-a: Dudea G. I. (V: 162).

Liceul comunității evreilor Galați.

Clasa V-a: Grossman A. (V: 100, 144*, 159, 160, VII: 102, VIII: 60, 61, 62), Șalovici M. (VII: 102, 103, VIII: 123), Vaisman I. (VII: 102, 103), Weissenberg M. (V: 100, 142*, 143*, VIII: 21*).

Clasa VI-a: Behrmann M. (VI: 123, 124, VII: 102, 103), Goldberg I. I. (VI: 123, 153, 154, 158*, 161, VII: 102, 103, VIII: 72).

Liceul „Ion Maiorescu" Giurgiu.

Clasa VII-a: Marinescu G. (VII: 102, 103), Nedelescu N. A. (VII: 104, 116, 130*).

Școala comercială superioară „Brătianu" Hațeg.

Clasa IV-a: Nopcea F. A. (V: 140, 154).

Liceul internat Iași.

Clasa VII-a: Matei D. (VII: 131, VIII: 47*).

Liceul „Alexandru cel Bun" Iași.

Clasa VI-a: Löbel W. H. (VI: 128, 130, 131, 138, 139, 142, 147).

Liceul „Național" Iași.

Clasa VI-a: Ionescu M. C. (VI: 138, 139).

Liceul „C. Brediceanu" Lugoj.

Clasa IV-a: Neumann F. (V: 145).

Clasa V-a: Constantinescu L. (V: 100), Drăgan I. (V: 100), Gall V. Zeno (V: 100, 140, VIII: 39), Kaminszy St. St. (V: 100, 137*, 139*, 140, 142, 143, 144*), Miclea S. I. (V: 134, 140, VII: 103), Nicolescu N. (V: 134, 139, 140, 144*), Popovici C. M. (V: 100, 124, VII: 102, 103), Sfergoci I. (V: 100, 159, 160).

Clasa VI-a: Bora L. (VII: 102, 103), Stamate I. (VI: 123, VIII: 33, 35).

Clasa VIII-a: Berindei L. T. (VII: 111*, 119, 120, 121, 127*, 129).

Liceul „Tasse Dumitrescu" Mizil.

Clasa IV-a: Diaconescu A. C. (IV: 124, 135), Dobre V. V. (IV: 113, 114 116), Mazilu I. I. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116), Pană I. I. (IV: 114, 116), Stănescu G. N. (IV: 121, 122, 128, 140).

Clasa V-a: Buznea C. R. (V: 100, 114, 140, 143, VII: 102, 103). Giambașu V. T. (V: 100), Popescu Al. (VII: 103, VIII: 35).

Liceul „Petru Rareș" Piatra Neamț.

Clasa VIII-a: Lazaride N. G. (VIII: 31*, 32, 36, 37, 39, 41, 42*).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel“ Ploeşti.

Clasa V-a: Ionescu N. G. (V: 143), Iordăchescu G. (V: 100), Grigorescu N. (V: 100), Nicolescu St. C. (V: 100, 120, 122, 129, 140, 141, 142*, 143*, VI: 130, VII: 102, 103, 107).

Clasa VIII-a: Gheorghiu Al. (VIII: 60, 61, 62, 75), Vischer O. E. (VIII: 60, 61, 62, 65).

Liceul „Regele Ferdinand“ Râmnicul-Sărat.

Clasa V-a: Comănescu Şt. I. (V: 111, 140, 162), Oroveanu D. T. (V: 129, 130, 140, 143, 161, 162, 169, 170, VII: 114*).

Liceul „Roman-Vodă“ Roman.

Clasa V-a: Leker I. (V: 100), Melinte I. V. (V: 100, 141).

Clasa VII-a: Gherson M. S. (VII: 102, 103), Rosenberg I. (VII: 102, 103, 106, 109, 115*, 116, 121).

Liceul „Mihail Eminescu“ Satu-Mare.

Clasa V-a: Goschi A. (V: 100, 140).

Clasa VII-a: Şilimon I. (VII: 103).

Clasa VIII-a: Hotwath B. (VIII: 60, 62, 63, 73*, 75, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 90).

Şcoala normală „Andrei Şaguna“ Sibiu.

Clasa VII-a: Răşănescu I. VII: 102, 103).

Liceul Silistra.

Clasa V-a: Ionescu M. (V: 134, 140, 141), Vartolomeu H. (V: 134, 140, 141).

Liceul „Enăchiţă Văcărescu“ Târgovişte.

Clasa IV-a: Agatstein E. (IV: 109, 118, 135, 140).

Clasa V-a: Crăciunoiu F. V. (V: 140, 144, VIII: 34, 60, 61, 65).

Clasa VII-a: Ion I. (VII: 102, 103, 131), Nicolae C. (VIII: 52).

Clasa VIII-a: Ionescu S. N. (VIII: 62, 63, 64*, 65*), Manea I. (VIII: 34, 35, 52*, 62, 68, 71), Radovici S. N. (VIII: 62, 63, 64*, 65, 68, 69, 70, 71, 75), Spirescu V. (VIII: 62, 65, 68, 69, 70, 71, 75, 81, 81, 83, 86, 87, 90).

Liceul „D. A. Sturza“ Tecuci.

Clasa VIII-a: Andronic St. M. (VIII: 44, 56*, 60*, 61, 62, 65, 75, 83, 84*, 85, 86).

Liceul „Principele Carol“ Tulcea.

Clasa V-a: Hasapi M. (V: 100).

Clasa VI-a: Ciurea C. (VI: 109).

Liceul „Regele Ferdinand“ Turda.

Clasa V-a: Anastasescu M. (V: 134).

Liceul „Traian" Turnu Severin.

Clasa IV-a: Anghel C. C. (IV: 110, 111, 112), Birău I. (IV: 110, 111, 114, 135), Boiangiu D. D. (IV: 122, 132, 135), Chiriac Sp. N. (V: 110, 112), Cueri A. (IV: 140), Frangulea I. (IV: 109), Grigorescu D. (IV: 135), Petcu Gr. Gr. (IV: 110, 112, 113), Petai A. R. (IV: 108*, 110, 111, 112, 116, 120* 126), Pisoschi Z. D. (IV: 110, 112, 113, 118), Săvulescu I. V. (IV: 112, 113 116), Scurtu G. P. (IV: 110, 111, 112, 116).

Fără indicație de liceu.

Ciurea C. N. (IV: 128), Diaconescu M. (VII: 123), Hortopan G. (VI: 123). Ionescu Gr. (VII: 102), Niculescu G. (VII: 97, 102, 103).

Liceul militar „D. A. Sturza" Craiova.

Clasa IV-a: Badea M. I. (IV: 110, 111, 112, 113, 115), Bădescu F. C (IV: 135, V: 162), Bărbulescu M. (IV: 99, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116), Brătan G. M. (IV: 110, 111, 112, 113, 115, 116), Ceciu I. A. (IV: 110, 111, 112, 113, 114), Ciobanu V. (IV: 110, 111, 112, 113, 115, 116), Constantinescu C. G. (IV: 110, 112, 113, 115, 116), Zincă A. St. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116), Dobrescu I. (IV: 110, 111, 112, 114), Florescu I. V. (IV: 110, 111, 112, 113, 114), Marinescu I. I. (IV: 110, 111, 112, 113, 116), Mateescu B. M. (IV: 110, 111, 112, 114, 115), Nanu N. B. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116), Pantelimon I. C. (IV: 110, 111, 112, 113, 114), Prunescu C. I. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 116), Savin C. J. (IV: 110: 111, 112, 113, 114, 116, 120, 126), Stănguciu S. G. (IV: 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116), Ţenovici I. E. (IV: 110, 111, 112, 113).

Clasa V-a: Ciovârnache A. (V: 162), Ciupag S. H. (V: 129), Enescu D. D. (V: 140, 162), VII: 102, 103), Enescu D. G. (V: 162, VIII: 39), Lupu Gruia (V: 162), Mădan I. (V: 162), Neagoe D. G. (V: 162, 169, 170), Şandru M. G. (V: 100, 129), Şerbănescu V. (V: 159, 160, 162), Ştefănescu R. (V: 140, VIII: 39).

Clasa VI-a: Afronie I. (VI: 123, 127, 142, VII: 102, 103), Bădescu G. N. (VI: 123, 127, 142, VII: 102), Berneanu A. (VI: 123, VII: 102), Cherciu (VI: 123, 124, VII: 102), Cioc I. D. (VI: 123, 141, 142, 147, 147, 148, 149*, VII: 104, 106, 116, VIII: 33, 75), Damian R. (VIII: 102), Gheorghiu M. (VIII: 39), Ghidirmic S. (VI: 123, 124, 127, 128, 142), Graur A. (VI: 123, 128), Grigore M. I. (VI: 123, 127, 142), Lazăr S. S. (VI: 123, 128), Mănoiu C. V. (VI: 123, 128), Popescu M. G. (VI: 123, 142), Paşoi N. M. (VI: 123, VII: 102, 103), Slăvuţeanu S. M. (VI: 123, VII: 102).

Clasa VII-a: Corciu I. M. (VII: 102, 103), Ionescu C. (VII: 102, 103), Nicolae D. T. (VII: 102, 102).

Clasa VIII-a: Avram I. (VIII: 39), Bărbulescu P. (VIII: 60, 61, 62, 63, 64), Cipriani L. (VIII: 39, 40), Comănescu T. (VIII: 62, 63, 66*), Constantinescu Tr. (VIII: 36, 39, 40, 46), Drăghicescu I. (VIII: 31*, 39, 46, 51, 60 61*, 62, 63, 66*), Frăsie S. T. (VIII: 36, 39, 40), Micu M. N. (VIII: 36, 39), Teişan C. S. (VIII: 36, 39, 40, 41, 60*, 62*, 66, 68, 75).

Liceul militar „Ştefan cel Mare“ Cernăuţi.

Clasa IV-a: Buişoru V. (IV: 126*), Gheorghiu V. L. (IV: 135), Ionescu D. S. (IV: IV: 108*, 114, 129, 130), Inişoru V. (IV: 112, 116), Niculescu G. V. (IV: 110, 114). Petrescu M. (IV: 135).

Clasa V-a: Alexandrescu P. (V: 100, 159, 160), Bărbulescu A. (V: 100), Bărgăoanu M. (V: 100, 159, 160, 162), Breţcanu C. (V: 159, 162), Constantinescu A. D. (V: 100, 144), Cosma A. (V: 160, 162), Dobbescu L. G. (V: 100, 160), Dumitrescu P. (V: 100), Dumitrescu V. M. (V: 144, 147*, Lazăr G. D. (V: 159, 160, 162), Matieş M. (V: 159, 160), Metz M. (V: 100), Moţoc L. R. (V: 159, 160, 162), Păunescu V. (V: 100), Petrovici I. C. (V: 159, 160, 162), Poalelungi V. (V: 100), Popovici J. C. (V: 159, 160) Rotta I. Şt. (V: 159, 160, 162), Şerbănescu Şt. (V: 100), Teodorescu V. (V: 100), Vasiliu G. N. (V: 100, 159, 160, 162).

Clasa VI-a: Apostol N. (VI: 123). Arhipescu M. C. (VI: 123, 138), Bancea N. (VI: 123), Bosinceanu D. G. (VI: 123), Boşoldea G. (VI: 123), Cruţescu T. (VI: 123), Dumitrescu V. (VI: 123, 131, 138), Floareş I. A. (VI: 123), Lazăr A. (VI: 123), Minaciu I. N. (VI: 123), Nedelcu V. N. (VI: 123, VIII: 75*), Negulescu A. (VI: 123), Nicolăescu I. T. (VI: 123), Nistorescu V. D. (VI: 138), Popa B. (VI: 123), Rohr. A. (VI: 123), Russu E. (VI: Ştefănescu Şt. (VI: 123), Tomescu G. T. (VI: 123), Vieru M. (VI: 123).

Clasa VII-a: Caraman D. V. (VIII: 75*, 102, 103), Runceanu N. C (VII: 121), Tanasiciuc V. C. (VIII: 125*, 129, 130, 131, 133).

Clasa VIII-a: Arbore I. D, (VIII: 146), Cehan G. A. (VIII: 46), Cristea G. E. (VIII: 60, 61, 62, 63, 64, 65*, 67, 68*, 69, 70, 71, 75*), Maftei M. C. (VIII: 46, 61, 62, 63, 64, 65, 68, 69, 70, 71, 75), Măgală I. G. (VIII: 60, 61, 62, 63, 75), Maxim I. (VIII: 68, 70, 71), Radu E. A. (VIII: 46, 60, 61, 62, 63, 64*, 65, 68, 69, 70, 71), Rottenberg A. (VIII: 62, 68, 69, 70, 71, 75), Zgârcea T. G. (VIII: 46).

Liceul militar „N. Filipescu“ M-rea Dealu Târgovişte.

Clasa II-a: Crăciunescu M. (IV: 109, VI: 123, VIII: 33, 35).

Clasa IV-a: Anastasiu M. M. (IV: 108*, 109 120). Heroiu N. S. (IV: 108*, 109, 130), Mazilescu C. (IV: 123*).

Clasa V-a: Florescu L. V. (V: 100), Manolescu N. (V: 100), Popescu S. (V: 136*, 137*, 139, 146*, 150*), Postelnicescu Şt. (V: 100), Rădulescu O. (V: 100).

Clasa VI-a: Beloiu B. D. (VI: 129, 135*, 147, 148), Negulescu D. S, (VI: 118*, 123, 135*, 137*, VII: 102, 103, 124), Nicolau S. (VI: 123).

Clasa VII-a: Mazilescu C. (VII: 126*, 129*, 130*), Pătru I. (VII: 102 103, 123). Marinescu E. (VII: 102, 103).

Clasa VIII-a: Dascălu I. (VIII: 21*, 42, 52*, 60, 61, 62, 63), Lăzăroiu R. (VIII: 41*, 48*, 49*, 50*, 51*, 52*, 60, 61, 62, 63, 65*, 73*, 75).

Liceul militar „Mihai Viteazu“ Tg.-Mureş.

Clasa IV-a: Anastasiu M. D. (V: 130), Avram T. (IV: 111, 112, V: 140), Costea N. D. (IV: 111), Mingea M. (IV: 126), Pop G. I. (IV: 109, 110, 113, 118, 131, 135), Zevedeanu G. (VI: 110, 112*, 113*, 126, 134).

Clasa V-a: Bejenaru V. (V : 100), Blaga L. L. (V : 134), Săndulescu N. (V : 100), Tătaru N. (V : 100, 134, 144, 152*, 154, VII : 102, 103).

Clasa VI-a: Bădescu I. (VI : 123), Capotă G. (VI : 123), Dolban G. (VII : 102, 103), Drăgulescu G. G. (VI : 134), Elencu A. (VI : 123), Enache I. (VI : 123), Huruzeanu C. (VI : 123, 124, 143, 147), Matei D. V. (VI : 123, 134, 136), Mosora N. N. (VI : 123, 124), Nicolae T. (VI : 114*, 123), Nicolau L. (VI : 124).

Clasa VIII-a: Dascălu I. (VIII : 46), Lăzăroiu I. R. (VIII : 46).

Liceul militar „Regele Ferdinand" Chișinău.

Clasa V-a: Fotolici A. (V : 100), Pântescu C. (V : 144, 159, 160, 161), Zolotovci I. D. (V : 100, 144, 146, 148, 150).

Clasa VII-a: Bulat L. M. (VII : 126, 129, 130).

Clasa VIII-a: Dumitru P. (VIII : 68, 69, 70, 71, 75*), Mușinski G. (VIII : 68, 69, 70, 71, 75*).

Liceul militar Iași.

Clasa V-a: Popovici V. A. (V : 146*, 170).

Clasa VI-a: Bârsă G. (VI : 143, 144), Școbiola A. C. (VI : 133, 134, 158, 159).

S'au mai primit câteva soluții bune, dar neiscălite.

EXERCIȚII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 157.* Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x}{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{y}{b}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$\frac{x}{b}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{y}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

C. I. B.

IV. 158. Să se verifice identitatea:

$$\frac{1}{a}\left(\frac{c}{b}-\frac{b}{c}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)$$

$$\equiv\frac{b-c}{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{c-a}{b}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{a-b}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right).$$

C. I. B.

IV. 159. Fie VG o generatoare a unui con circular drept. Dacă a este distanța mijlocului acestei generatoare la centrul cercului de bază, iar aria laterală πa^2, să se afle volumul conului.

C. I. B.

IV. 160. Un bucătar voind să-și răsplătească ajutoarele, le împarte un coș de ouă. Împărțeala o face dând fiecăruia un număr de ouă, după merit, și anume: *primului* jumătate din numărul total de ouă plus $^1/_2$ ou; *celui de al doilea* jumătate din numărul rămas de ouă plus $^1/_2$ ou, iar *celui de al treilea* jumătate din numărul rămas de ouă plus $^1/_2$ ou, și îi mai rămân și lui 4 ouă.

Se întreabă câte ouă au fost în coș și cum le-a împărțit bucătarul, știind că nu a spart niciun ou?

I. S. A.

IV. 161. Un tetraedru regulat are muchia $^1/_{10}$ m. Se cufundă într'un basin paralelipipedic cu dimensiunile bazei de 1 m și $\frac{1}{3}$ m. Cât se va ridica apa în basin?

N. M.

IV. 162. Media geometrică între două mărimi date a și b, este numărul x care verifică ecuațiunea:

$$\frac{a}{x}+\frac{x}{a}=\frac{b}{x}+\frac{x}{b}.$$

N. M.

IV. 163. Un triunghiu ABC are baza $\overline{BC}=a$ și înălțimea $\overline{AA'}=h$. La ce distanță de A trebue dusă o paralelă laturii BC, pentru ca perimetrul dreptunghiului având o latură segmentul paralelei cuprins între AB și AC, iar latura opusă pe BC, să aibă valoarea k.

C. I. B.

IV. 164. Să se înscrie un dreptunghiu într'un pătrat a cărui latură e dată a, știind că raportul dintre lungimea și lățimea dreptunghiului este cunoscut k.

C. I. B.

IV. 165. Pe o dreaptă se dau punctele A, B, C ale căror distanțe la un punct O al dreptei sunt respectiv *a, b, c.* Să se determine pe dreaptă un punct M, așa fel încât să existe relația

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = 2.$$

C. I. B.

IV. 166. Aceeași problemă, dacă relația impusă este

$$\frac{1}{\overline{MA}} + \frac{1}{\overline{MB}} + \frac{1}{\overline{MC}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB} \cdot \overline{MC}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{MC} \cdot \overline{MA}} + \frac{\overline{MC}}{\overline{MA} \cdot \overline{MB}}.$$

C. I. B.

Clasa V-a. *Exerc. 183.* Dacă :

$$x + y = u$$
$$ax + by = v,$$

să se exprime în funcție de u și v expresia :

$$x^2 + y^2 + cxy.$$

C. I. B.

V. 184. Să se verifice identitatea :

$$\left[[[(i^3 + i)^3 + i]^3 + i]^2 + i \right]^2 = -1$$

unde $i = \sqrt{-1}$.

A. A. R.

V. 185. Se cere să se găsească o fracție echivalentă cu 0,675 ai cărei termeni să aibă produsul egal cu 17.424.

GH. B.

V. 186. Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației :

$$(a^2 + b^2)\, x^2 - 2abcx + c^2 = 0$$

avem relația :

$$\frac{c^2}{x_1^2} + \frac{c^2}{x_2^2} = 2\,(2a^2 b^2 - a^2 - b^2).$$

Caz particular $a = b = 1$.

N. M.

V. 187. Se consideră unghiul AOB şi bisectoarea lui OC; se ia pe OB şi OC, $\overline{OM} = \overline{ON}$, M şi N se proiectează pe OA în P şi Q. Să se arate că:

$$2\frac{\overline{OP}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{NQ}} - \frac{\overline{NQ}}{\overline{OQ}}.$$

N. M.

V. 188. Pe latura AB, a pătratului ABCD, se ia în exterior punctul M, iar pe CB în interior punctul N, aşa ca: $\overline{BM} = \overline{CN}$. Se completează dreptunghiul AMPQ de bază $\overline{AM}$ şi înălţime $\overline{BN}$. In ce caz aria dreptunghiului AMPQ e mai mare decât aria trapezului CDQP?

G. D. S.

V. 189. Să se calculeze rădăcinile ecuaţiei:

$$2x^2 - ax - (a + 2) = 0.$$

G. D. S.

V. 190. Să se determine m şi n astfel ca polinomul:

$$x^4 - 2x^3 + mx + n$$

să fie divizibil cu

$$x^2 - 3x + 2.$$

A. A. R.

V. 191. Câte grade *Celsius* corespund temperaturii de 60 grade *Fahrenheit?*

Dar pe scara termometrului *Réaumur,* cât va corespunde?

I. L.

V. 192. Până la ce temperatură trebue să încălzim o masă de gaz, plecând dela 10°, pentru a-i spori volumul cu 20%?

I. L.

Clasa VI-a. *Exerc. 163.* Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$E = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a.$$

C. I. B.

VI. 164. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\sin (x + 30^0) + \sin (x + 40^0) = \sin 10^0.$$

C. I. B.

VI. 165. Fie VG o generatoare a unui con circular drept. Dacă a este distanța mijlocului acestei generatoare la centrul cercului de bază, iar aria totală πa^2, să se afle volumul conului.

C. I. B.

VI. 166. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$E \equiv \sin (a + b) + \sin (a + c) + \sin (b - c).$$

C. I. B.

VI. 167. Să se simplifice fracțiunea:

$$\frac{\sin (a + b) + \sin (a + c) + \sin (b - c)}{\sin (a + b) - \sin (a + c) + \sin (b - c)}.$$

C. I. B.

VI. 168. Dacă într'un triunghiu avem relația

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{1 - \frac{c}{p}}$$

triunghiul e isoscel.

I. S. A.

VI. 169. Să se verifice identitatea:

$$\sin^4 a - \cos^4 a = 1 - 2 \cos^2 a.$$

A. A. R.

VI. 170. O sferă de centru O este tăiată de două plane paralele P şi Q situate la distanţa d unul faţă de altul. Să se găsească distanţa dela centrul sferei la planul P aşa fel încât suprafaţa zonei sferice determinată de cele două plane să fie egală cu suma suprafeţelor secţiunilor plane.

Intre ce limite poate varia distanţa d?

G. D. S.

VI. 171. Să se arate că unghiurile diedre ale unui dodecaedru convex regulat, sunt date de formula:

$$\cos\alpha = \frac{a_5(l_5 - l'_5)}{l_5(2a_5^2 + a_5 - 1)},$$

unde a_5, şi l_5 sunt respectiv apotema şi latura pentagonului regulat convex înscris în cercul de rază unitatea şi l'_5 este latura pentagonului regulat stelat înscris în acelaşi cerc.

C. I. Ţ.

VI. 172. Dacă asvârlim o piatră drept în sus cu o vitesă de 20m/sec, şi dacă neglijem rezistenţa aerului, după cât timp va cădea?

I. L.

Clasa VII. *Exerc. 154.* Dacă:

$$x + y + z = u$$
$$ax + by + cz = v$$
$$a^2x + b^2y + c^2z = w,$$

să se exprime în funcţiune de u, v, w expresia:

$$x^2 + y^2 + z^2 + kxyz.$$

C. I. B.

VII. 155. Se dă funcţiunea

$$y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Să se stabilească relaţia:

$$y' - \cos^2 y = 0.$$

C. I. B.

VII. 156. Se dă funcţiunea:

$$y = \arccos \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Să se stabilească relaţiunea:

$$y' + \sin^2 y = 0.$$

C. I. B.

VII. 157. Se dau în epură punctele A (3, 4, 2), B (3, 7, 8). Să se determine cota punctului C, situat pe dreapta AB şi având depărtarea 5.

C. I. B.

VII. 158. Să se rezolve ecuaţia:

$$\arcsin x = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

GH. B.

VII. 159. Să se pună expresia:

$$\frac{1}{1 - 2i} - \frac{1}{1 + i} + \frac{1}{1 - 7i}$$

subt forma: $a + bi$.

A. A. R.

VII. 160. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{\operatorname{arc\,tg}(x - a)} - \frac{1}{x - a} \right).$$

C. I. B.

VII. 161. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sqrt[3]{x - \frac{\pi}{4}}}.$$

C. I. B.

VII. 162. Se dă o sferă de rază R şi o sferă tangentă de rază variabilă. Să se studieze variaţia volumului trunchiului de con circular drept ale cărui generatoare sunt tangente comune celor două sfere.

C. I. B.

VII. 163. Să se studieze variaţia volumului trunchiului de con a cărui generatoare este egală cu suma razelor bazelor, iar raportul dintre aria totală şi acea laterală este k.

C. I. B.

Clasa VIII-a. *Exerc. 91.* Să se determine a astfel ca ecuaţiunile:

$$2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 11x + a = 0$$

$$2x^4 - 5x^3 - x^2 + 5x + 2 = 0$$

să admită două rădăcini comune. Să se rezolve apoi ecuaţiile.

G. D. S.

VIII. 92. Să se rezolve ecuaţia

$$x^3 - 2x^2 - 11x + a = 0$$

ştiind că între rădăcini există relaţia:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

G. D. S.

VIII. 93. Să se descompună forţa F, dirijată după baza mare a unui trapez dreptunghic, în trei componente dirijate după celelalte laturi ale trapezului, ştiind că înălţimea şi baza mică a trapezului sunt egale, iar latura oblică face cu baza mare 45^0.

G. D. S.

VIII. 94. Se cere rezultanta sistemului de forţe

$$F_1 = F \ , \ F_2 = 2F \ , \ F_3 = 3F$$

ştiind că

$$\widehat{F_1 \ , \ F_2} = 90^0 \text{ şi } \widehat{F_2 \ , \ F_3} = 45^0.$$

G. D. S.

VIII. 95. Două puncte fixe A şi B, situate pe două diametre perpendiculare ale unui cerc, atrag un punct M, mobil pe cerc, cu forţele

$$K.\overrightarrow{MA} \text{ şi } K.\overrightarrow{MB}.$$

Să se determine poziţia de echilibru a punctului M şi reacţiunea cercului.

G. D. S.

VIII. 96. Se dă cercul $x^2 + y^2 = a^2$ şi iperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

O tangentă variabilă la cerc taie iperbola în două puncte M şi M'. Tangentele în aceste puncte la iperbolă se întâlnesc într'un punct al cărui loc geometric se cere.

G. D. S.

VIII. 97. Se dă elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

şi iperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

O tangentă variabilă la elipsă taie iperbola în două puncte M şi M'. Tangentele în aceste puncte la iperbolă se întâlnesc într'un punct al cărui loc geometric se cere.

2. Polarele unui punct din plan în raport cu cele două curbe se taie pe axa OX.

G. D. S.

VIII. 98. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^6 - 4x^5 + x^4 + 10x^3 - 11x^2 - 4x + 3 = 0$$

ştiind că are rădăcini multiple.

A. A. R.

VIII. 99. Să se determine numerele α, β, m, p astfel încât să putem scrie:

$$x^4 + px^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + mx + 4).$$

A. A. R.

VIII. 100. Să se calculeze integrala:

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{(2x+3)(3x+2)}.$$

A. A. R.

ERATA. La exercițiu VI: 162, se va pune semnul — (minus), înaintea primului termen.

La VII: 155, se va îndrepta prima parte:
dacă $\log a : \log b = \log (a : 10)$ atunci

$$\log ab = \log a \,.\, \log b, \ldots$$

La VII: 148, prima parte a relației se va considera derivată:

$$\left(\frac{e^x}{x} S_{n-1}\right)' = \ldots$$

La VII: 77, punctele din prima paranteză sunt $(0, \pm \sqrt{2})$ în loc de $(0, \pm 2)$.

Soluțiunile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului și se redactează după „Instrucțiunile" publicate în Nr. 1, pag. 24.

Elevii din clasele VI, VII și VIII cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică".

„Gazeta Matematică" apare la 15 al fiecărei luni. Costul abonamentului este 200 lei și se trimite la „Casa Gazeta Matematică" Calea Griviței 158 — București 2.

Drepturile de reproducere rezervate „Societății Gazeta Matematică".

1935/36

Nr. 9

BIBLIOTECA CENTRALĂ
a „ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL II. No. 9 — 1 IUNIE 1936

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

REDACŢIA SUPLIMENTULUI CU EXERCIŢII AL „GAZETEI MATEMATICE", IN CURSUL ANULUI II A FOST COMPUSĂ DIN D-NII:

I. S. Antoniu
N. Botea
General Gh. Buicliu
U. M. Florescu
Ad. Gheorghiu
Gh. Th. Gheorghiu
H. Ionescu-Biss
C. Ionescu-Bujor
Lt. C. Ionescu-Ţiu
Maior I. Linteş
N. N. Mihăileanu
Al. A. Roşu
Gh. D. Simionescu
O. N. Ţino

EXERCIŢII REZOLVATE

Răspuns Exerc. V. 118. An. II.

$$1+x^2=\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)+3\ ;\ E=\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)^4+12\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)^3$$
$$+55\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)^2+115\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)+93.$$

O. N. Ţ.

Răspuns Exerc. V. 119. An. II.

$$E\equiv(x^2+2)+[(x^2+2)^2+2]+[[x^2+2)^2+2]^2+2].$$

$$x^2+2=n^2+\frac{1}{n^2}\ ;\ E=\left(n^8+\frac{1}{n^8}\right)+9\left(n^4+\frac{1}{n^4}\right)+\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)+24.$$

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 133. Se cunosc bazele* a *şi* b *ale unui trapez circumscriptibil unui cerc dat. Se cere să se construiască segmentul de dreaptă care uneşte punctele de tangenţă ale laturelor neparalele.*

GH. B.

Fie T, T′ punctele de tangenţă ale cercului O cu laturele paralele AB, CD şi T_1, T_2 punctele de tangenţă ale laturelor neparalele AC, BD cu acelaşi cerc. Diametrul EF $\perp$ TT′ trece prin mijloacele M şi N ale lui AC şi BD. Se ştie că

$$(1) \qquad MN = \frac{a+b}{2}$$

şi că unghiurile OT_1M, OT_2N sunt drepte. De aici urmează construcţia: Se duc diametrele TT′ perpendiculare între ele. Pe tangentele în T, T′ se vor găsi vârfurile trapezului.

Pe EF se ia un segment MN, dat de (1), aşa ca nici unul din punctele M şi N să nu fie între E şi F. Cercul de diametru OM taie cercul O în T_1, T'_1 iar cercul de diametru ON taie pe O în T_2, T'_2. Punctele T_1, T'_1, T_2, T'_2 sunt punctele cerute în enunţ.

Condiţia de posibilitate este că:

$$EE \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Problema este nedeterminată căci MN se poate aşterne pe EF în un număr nedeterminat de felurl.

V. 153. Să se construiască un triunghiu dreptunghic cunoscând înălţimea şi suma catetelor.

GH. B.

Fie ABC triunghiul dreptunghic în care se cunoaşte înălţimea $BH = i$ şi suma m a catetelor AB, BC. Avem:

$$b + c = m \; ; \; bc = ai \; ; \; b^2 + c^2 = a^2$$

de unde se scoate:

$$a^2 + 2ia - m^2 = 0$$

$$\therefore \; a = -i \pm \sqrt{i^2 + m^2}$$

care dă valoarea ipotenuzei BC. Din punct de vedere geometric se ia numai valoarea pozitivă

$$a = -i + \sqrt{i^2 + m^2}.$$

Construcția cerută e următoarea. Pe un segment AM egal cu $b + c = m$ se ridică în M o perpendiculară pe care se ia $MD = i$ apoi dela D spre A se ia pe AD lungimea $DC' = i$, rezultă $AC' = a$. Acum se construește cercul de diametru AC' care se taie în B, B' sau B_1, B'_1 cu o paralelă la AC' depărtată cu i de AC'.

Problema este totdeauna posibilă.

V. 154. Să se demonstreze că dacă într'un triunghiu ABC *se ia simetrica laturei* AC *față de bisectoarea interioară a unghiului* B *și simetrica aceleiași laturi* AC *față de bisectoarea exterioară a unghiului* B, *se obțin două drepte paralele.*

GH. B.

Fie B_1, B_2 piciorul bisectoarelor unghiului B. Simetrica lui AC față de BB_1, trece prin B_1 și prin B'_2 simetricul lui B_2 față de B, căci unghiul B_1BB_2 este drept. La fel simetrica lui AC față de BB_2 trece prin B_2 și simetricul B'_1 al lui B_1 față de B. Dar figura $B_1B_2B'_2B'_1$, având diagonalele perpendiculare în mijlocul lor, este un romb, deci $B_1B'_2 \parallel B_2B'_1$.

Clasa VI-a. *Exerc. 121. Să se stabilească identitatea:*

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{(a-b)(b-c)} + \sqrt{(b-c)(c-a)} + \sqrt{(c-a)(a-b)}}} = \frac{\sqrt{2}\left[\sqrt{(a-b)^3} + \sqrt{(b-c)^3} + \sqrt{(c-a)^3} + \sqrt{(a-b)(b-c)(c-a)}\right]}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}.$$

C. I. B.

$$\left(\sqrt{a-b} + \sqrt{b-c} + \sqrt{c-a}\right)^2 = 2\left[\sqrt{(a-b)(b-c)} + \sqrt{(b-c)(c-a)} + \sqrt{(c-a)(a-b)}\right]$$

sau

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{a-b} + \sqrt{b-c} + \sqrt{c-a}\right] = \sqrt{\sqrt{(a-b)(b-c)} + \sqrt{(b-c)(c-a)} + \sqrt{(c-a)(a-b)}}.$$

Deci membrul I al egalității enunțului se transformă astfel:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}+\sqrt{c-a}}=\frac{\sqrt{2}\left[\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}-\sqrt{c-a}\right]}{2a-2c+2\sqrt{(a-b)(b-c)}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left[\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}+\sqrt{c-a}\right]\left[a-c-\sqrt{(a-b)(b-c)}\right]}{2\left[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left[\sqrt{(a-b)^3}+\sqrt{(b-a)^3}+\sqrt{(c-a)^3}+\sqrt{(a-b)(b-c)(c-a)}\right]}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}.$$

VI. 122. Să se stabilească egalitatea:

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{b-c}}+\frac{1}{\sqrt{c-a}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt[4]{\frac{a-b}{(b-c)(c-a)}}+\sqrt[4]{\frac{b-c}{(c-a)(a-b)}}+\sqrt[4]{\frac{c-a}{(a-b)(b-c)}}\right].$$

C. I. B.

Avem:

$$(\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}+\sqrt{c-a})^2$$

$$=2\left[\sqrt{(a-b)(b-c)}+\sqrt{(b-c)(c-a)}+\sqrt{(c-a)(a-b)}\right].$$

Deci:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{(a-b)(b-c)}+\sqrt{(b-c)(c-a)}+\sqrt{(c-a)(a-b)}}}{\sqrt[4]{(a-b)(b-c)(c-a)}}$$

$$=\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}+\sqrt{c-a}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(a-b)(b-c)(c-a)}}$$

sau

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{b-c}}+\frac{1}{\sqrt{c-a}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt[4]{\frac{a-b}{(b-c)(c-a)}}+\sqrt[4]{\frac{b-c}{(c-a)(a-b)}}+\sqrt[4]{\frac{c-a}{(a-b)(b-c)}}\right]$$

VI 125. Un număr N *are doi factori primi.*
Fie P *produsul tuturor divizorilor lui* N.
Se cere să se găsească N, *știind că numărul divizorilor lui* P *este 496 și că*

$$\log P = 24{,}65175.$$

GH. B.

Fie a, b două numere prime și α, β două numere întregi așa ca

$$N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta}.$$

Se găsește în cursurile de aritmetică că P este dat de

$$P = N^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2}}$$

$$\therefore \qquad P = a^{\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2}} b^{\frac{\beta(\beta+1)(\alpha+1)}{2}} \qquad (1).$$

Insemnând cu n numărul divizorilor lui P, se știe că acest număr este dat de formula

$$n = \left[\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2} + 1\right]\left[\frac{\beta(\beta+1)(\alpha+1)}{2} + 1\right].$$

Din ultima formulă, și ținând seamă de enunț, se deduce

$$(\alpha+1)(\beta+1)[\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)+2(\alpha+\beta)] = 4 \times 496 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11 \qquad (2).$$

α și β nu pot fi deodată neperechi căci atunci membrul I ar fi divizibil prin 8, iar membrul II nu. Cu această observație dăm lui $\alpha + 1$ pe rând valori egale cu divizorii lui $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$ și deducem valoarea lui β din (2). Se găsește singura soluție

$$\alpha = 4 \ , \ \beta = 2$$

pe care ducând-o în (1) se găsește

$$P = a^{30} b^{15}.$$

Din

$$\log P = 15 \log a^2 b = 24{,}65175$$

se deduce

$$\log a^2 b = 1{,}64345$$

$$\therefore \qquad a^2 b = 44 = 2^2 \times 11$$

$$a^2 = 2^2 = 4 \ , \ b = 11$$

și

$$N = 2^4 \times 11^2 = 1936.$$

Răspuns Exerc. VII. 96. An. II. Funcțiunea y este rațională căci:

$$T(x) \equiv \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x} = \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$= \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{2\cos^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \left[\operatorname{tg} x \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\right]^2,$$

așa dar domeniul ei de existență este *tot planul.*

Funcțiunea y este funcțiune periodică, de perioadă 2π.

O. N. Ț.

Clasa VII-a. *Exerc. 107. Să se pună sub formă de produs determinantul:*

$$D = \begin{vmatrix} ab & a+b & c^2 \\ bc & b+c & a^2 \\ ca & c+a & b^2 \end{vmatrix}$$

G. D. S

Scădem linia II-a din III-a și a I-a din a II. Obținem:

$$D = \begin{vmatrix} ab & a+b & c^2 \\ b(c-a) & c-a & a^2-c^2 \\ c(a-b) & a-b & a^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} ab & a+b & c^2 \\ b & 1 & -a-c \\ c & 1 & -b-a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(c-b) \begin{vmatrix} ab & a+b & c^2 \\ b-c & 0 & b-c \\ c & 1 & -a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a) \begin{vmatrix} ab & a+b & c^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & -a-b \end{vmatrix}.$$

Ultimul determinent se calculează ușor. Găsim:

$$D = (a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca).$$

VII. 108. Să se pună sub formă de produs determinantul.

$$D = \begin{vmatrix} ab & a+b & a^2+b^2 \\ bc & b+c & b^2+c^2 \\ ca & c+a & c^2+a^2 \end{vmatrix}.$$

G. D. S.

Acelaşi procedeu ca la exerciţiul precedent. Găsim:

$$D = -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca).$$

VII. 109. Câte puncte de intersecţie rezultă din întretăerea n *drepte în acelaş plan, dintre care* p *trec prin acelaş punct şi* q *sunt paralele?*

G. D. S.

n drepte dau C_n^2 puncte de intersecţie. p drepte fiind concurente, se pierd $C_p^2 - 1$ puncte, iar q drepte fiind paralele, se pierd C_q^2 puncte. Numărul de puncte rămase este:

$$N = C_n^2 - C_p^2 - C_q^2 + 1.$$

VIII. 14. Se cere adevărata valoare a expresiei:

$$\lim_{x \to \infty} \left[e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}\right]^{tg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)}.$$

G. D. S.

Să notăm expresia de mai su cu E. Obţinem 1^{∞}. Avem:

$$\text{Log. } E = tg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) \text{Log}\left[e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}\right] = \frac{\text{Log}\left[e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}\right]}{\cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)}$$

care pentru $x \to \infty$ dă $\frac{0}{0}$. Aplicăm regula lui HÔPITAL:

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{Log} E = \lim \frac{1}{e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}} \times \frac{-e^{-x} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)}}$$

$$= -\lim \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)}{e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}} \times \lim \left(x^2 e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$= -\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} + \lim e^{\frac{1}{x}}\right) = -1.$$

Deci: $\lim_{x\to\infty} E = \frac{1}{e}$.

Răspuns Exerc. VIII. 18. An. II.

Funcţiunea y este periodică având perioada 2π, deci este deajuns să studiem variaţiunea ei în intervalul $(0,2\pi)$.

Derivata întâia: $y' = \cos x - \sin x$ se anulează în acest interval pentru

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{şi} \quad x = \frac{5\pi}{4},$$

iar derivata a doua $y''(x) = -(\sin x + \cos x)$ dă

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0 \quad \text{şi} \quad y\left(\frac{5\pi}{4}\right) > 0,$$

deci funcţiunea continuă y are un maxim pentru $x = \frac{\pi}{4}$ şi un minim pentru $x = \frac{5\pi}{4}$ şi anume: $y_{max} = +\sqrt{2}$ şi $y_{min} = -\sqrt{2}$.

Curba taie axa absciselor între 0 şi 2π în punctele

$$\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right) \text{ şi } \left(\frac{5\pi}{4}, 0\right).$$

Pe altă cale transformând suma în produs avem variaţiunea unui cosinus.

Răspuns Exerc. VIII. 19. An. II.

Funcţiunea este periodică de perioadă 2π şi este prin urmare deajuns să studiem variaţiunea într'un singur interval de lungimea 2π; cum funcţiunea este discontinuă pentru

$$x = -\frac{\pi}{2} \text{ şi } x = +\frac{\pi}{2},$$

vom lua acest interval:

$$\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon, -+\frac{\pi}{2}-\varepsilon / \frac{\pi}{2}+\varepsilon, -+\frac{3\pi}{2}-\varepsilon\right).$$

Formând derivata întâia a lui y, observăm că ea se anulează când:

$$\boxed{\sin^3 x = \sin x + 1 = 0}$$

care are o singură rădăcină reală negativă mai mică ca -1, aşa că pentru valorile reale ale lui x, derivata y'_x este tot timpul pozitivă; deci funcţiunea y este în intervalele de continuitate continuă crescătoare.

Formând derivata a doua a lui y, observăm că ea se anulează pentru rădăcinile ecuaţiunii:

$$\boxed{\sin^4 x - 2\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0}$$

care are două rădăcini reale, dintre care una în intervalul $(0, +1)$ care convine lui $\sin x$. Avem ca urmare 2 puncte de inflexiune şi două zerori în intervalul considerat.

O. N. Ţ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Subiectele date pentru lucrarea scrisă la matematici la examenul de admitere în cursul superior la liceele militare, din sesiunea Septemvrie 1935

Liceul militar „D. A. Sturdza" Craiova.

Latura pătratului bazei unei piramide regulate este de 6 m., înălţimea piramidei este de 4 m.

Să se afle:

a) Aria totală a piramidei;

b) Volumul piramidei.

Această piramidă se taie pe la jumătatea înălţimei cu un plan paralel cu baza.

Să se afle:

a) Suprafaţa laterală a trunchiului de piramidă;

b) Volumul trunchiului de piramidă.

Liceul militar „N. Filipescu" M. Dealu.

Se dă sistemul:

$$\frac{3x+5y}{2}-\frac{2x-y}{3}=\frac{71}{6}$$

$$\frac{3(x-y)}{3}+\frac{2x+3y}{5}=\frac{22}{5}.$$

Se cere:

1. Să se rezolve sistemul;

2. Soluţiile sistemului fiind egale: cea mai mare cu înălţimea şi cea mai mică cu diferenţa razelor unui trunchiu de con circular drept, exprimate în cm., să se afle volumul acestuia, ştiind că suprafaţa sa laterală este de 45π cm^2.

Liceul militar „G-ral Div. Gh. Makarovici" Iaşi.

Un con are raza cercului de bază 2,5 m. şi suprafaţa laterală întreitul suprafeţei bazei. Se cere să se afle:

1. Generatoarea conului:

2. Volumul conului;

3. Unghiul sectorului circular după care s'ar desfăşura suprafaţa laterală pe un plan.

Liceul militar „Mihai Vitezul" Tg.-Mureş.

Catetele unui triunghiu dreptunghiu sunt proporţionale cu numerele 3 şi 4. Jumătatea uneia mărită cu 2/3 ale celeilalte şi cu încă 7 cm., face cât suma lor mărită cu 1 cm.

Triunghiul se roteşte în jurul ipotenuzei, dând naştere unui corp al cărui volum şi suprafaţă se cere.

Liceul militar „Ştefan Cel Mare“ Cernăuţi.

Un stăpân se învoieşte cu servitorul său să-i dea 1000 lei şi un rând de haine pe an. După 7 luni, servitorul este concediat şi primeşte 200 lei plus rândul de haine. Cât s'au socotit hainele.

Un triunghiu dreptunghiu cu catetele a 5 cm., 12 cm. se roteşte în jurul ipotenuzei. Să se afle volumul corpului născut prin această rotaţie.

Liceul militar „Regele Ferdinand I“ Chişinău.

O grămadă de lemne de forma unui paralelipiped dreptunghiu are înălţimea de 5 m., iar lungimea şi lăţimea sunt legate prin ecuaţia :

$$x + y = 45 \; ; \; \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \; .$$

Să se afle costul lemnelor, ştiind că 1 m. cub de lemne cântăreşte 420 kgr. şi lemnele se vând cu 5600 lei vagonul la 10.000 kgr.

Până la 10 Maiu s'au primit soluţiuni bune pentru exerciţiile publicate în numerele 5, 6, 7 şi 8 dela [1]):

Şcoala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu“ Bucureşti.

Clasa V-a: Nicolau A. Elena (V: 162), Popescu Irina (V: 162).

Clasa VI-a: Lupu N. Maria (VI: 134*, 136*, 139*, 156*,), Romaşcan G. Georgeta (VI: 124, 126*, 135*, 136*, 142, 146, 148, 154, 156*, 157*, 162*, 163*, 164*, 165*, 166*, 167*, 169' VII: 133, 145*,, Stănescu N. Virginia (VI: 124, 143, 147, 148, 156*, 163*, 169, VIII: 79, 83), Trofin I. Aurora (VI: 134*, 135*, 136*, 140* .

Liceul de fete „Carmen Sylva“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Avramovici A. Micaela (IV: 120, 122, 123, 124, 126, 127, 128*, 152, 155), Constantinescu D. Paula (IV: 121, 155, 156 , Dăscălescu A. Lucia (IV: 120, 126, 127, 128*), Holman C. Eugenia (IV: 156), Mayer B. Sylvia (IV: 108*, 116, 120, 127, 128*, 134, 140, 141, 155, 156,, Muşat I. Alexandrina (IV: 121, 122*, 142, 155, 156), Niculescu Paula C. Ana (IV: 120, 126, 127, 128*), Nissim L. Mioara (IV: 134*, 155, 156), Petrovanu D. Simona (IV: 141, 143), Pinsler Fani (IV: 122, 150, 151, 152, 156 , Renert Tica (IV: 108*, 116, 122, 142, 155, 156), Walter Stela (IV: 108*, 109*, IV: 143, 155, 156).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Clasa V-a: Lipschitz Beatrice (V: 162, 172, 174, VIII: 65, 75).
Clasa VI-a: Gabrielescu Aristița (VI: 153, 154, 158*).
Clasa VII-a: Petrov E. Elena (VII: 147, 150*, 151, VIII: 90), Vasiliu Maria (VII: 131, 135*, 136*, VIII: 82).

Liceul de fete „Regina Maria" București.

Clasa IV-a: Paladescu Cristina (IV: 158*, 159*, 160*), Șerbănescu Viorica (IV: 121*, 127*, 134*, 135*, V: 168*).
Clasa V-a: Hionodache M. Maria (V: 162).
Clasa VI-a: Iacoby D. Marcela (VI: 143, 154, 169).

Liceul de fete „Domnița Ileana" București.

Clasa V-a: Catulescu D. Angela (V: 174, 183, 184, 186, 189*, 190), Crăciun A. Aurelia (V: 134, 159, 160, 166, 167, 168, 171, 163, 174, 177, 179, 184, 189*, VI: 143, 144), Goldenberc I. Henriette (V: 159, 160, 162, 166, 167, 168, 171, 172, 173, 177, 179, 184).

Institutul „Moteanu" București.

Clasa VII-a: Drăniceanu Victoria Eugenia (VII: 97, 118, 134*, VIII 1, 2, 16).

Institutul „Ortodox internat" București.

Clasa IV-a: Plăvițescu N. Clementa (IV: 108*, 145, 153, 155).
Clasa V-a: Otetelișanu E. Ruxandra (V: 169, 170, 171, 172, 173, 174, 176, 177).

Externatul ortodox „Zoe Romniceanu" București.

Clasa VII-a: Lazafovici I. Rozica (VII: 145, VIII: 90), Rociu I. Margareta (VII: 138).

Liceul de fete „Iulia Hașdeu" București.

Clasa IV-a: Stavrescu D. Aurora (IV: 132*, V: 162).

Liceul de fete „Aurel Vlaicu" București.

Clasa V-a: Stoicescu Elena (V: 159, 160, 184).
Clasa VIII-a: Popescu Jana (VIII: 46).

Institutul Pompilian București.

Clasa VI-a: Belloiu Margareta (VI: 136, 154), Mărculescu Fintea I. Sofia (VI: 154, 169), Netzler B. Josetta (VI: 135, 136, 143, 154, 161*, 169).

Liceul de fete Bacău.

Clasa VI-a: Papadopol D. Elena (IV: 135, 162).

Liceul de fete „Dr. C. Angelescu" Buzău.

Clasa V-a: Amira Mariana (V: 144*), Leonescu E. Magdalena (V: 132, 134, 140*, 141*, 156, 157, 162, 164*, 178, 179, 180*, VI: 143, 169), Stancu A. Silvia (V: 130, 132, 134), Stoicescu Viorica (V: 177, 186, VI: 133, 134, 135, 136, 143, 144, 153, 154, 156, 158, 159, 161*, 163, 165, 166, 167). Stoicescu Angelica (V: 179, 181*).

Clasa VIII-a: Ionescu Filofteia (VIII: 64, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88).

Liceul de fete Caracal.

Clasa VI-a: Musceleanu I. Ileana (VI: 132, 133, 134, 135, 136, 137, 139, 140, 143, 144).

Liceul de fete „Ecaterina Urziceanu" Craiova.

Clasa VII-a: Vlădescu Yvonne (VII: 138, 147, VIII: 79, 83).

Liceul de fete „Mihail Kogălniceanu" Galați.

Clasa VII-a: Frunzetti Elena (VII: 150*, VIII: 90), Grigoriu D. Aurora (VII: 125, 126, 129, 130, 132, 149, 150*, VIII: 90), Popescu Eliza (VII, 149, VIII: 90).

Clasa VIII-a: Burdescu I. Maria (VIII: 39, 52*), Coadă Aurelia (VIII: 81, 82, 83, 86, 88), Finchelstein M. Cornelia (VIII: 46, 52*).

Gimnaziul de fete „Roșiori de Vede".

Clasa IV-a: Neguș Ana (IV: 135, 142, V: 159, 160, 169, 171, 172, 173, 177, 179, 186, VI: 133, 134, 135, 136, 154, 158, 159, 161*, 163, 166, 167, 169).

Liceul de fete „Carabella" Târgoviște.

Clasa IV-a: Spălățeanu I. Stela (IV: 139, 155).

Clasa VII-a: Guttman Prisca (VII: 103).

Liceul de fete „Carmen Sylva" Timișoara.

Clasa IV-a: Domonkos Erica (IV: 135, 142).

Liceul de fete „Principesa Elena" Turnu-Severin.

Clasa V-a: Moșteoru Silvia (V: 158).

Clasa VI-a: Trandafirescu T. A. (VI: 144).

Liceul „Spiru Haret" București.

Clasa IV-a: Dailis I. A. (IV: 124, 126, 127, 135, 136, 140, V: 162).

Clasa V-a: Stănculescu M. (V: 132, 149, 152*, 157, 160, 166, 168, 169, 170, 172, 174, 179, 184, 189*, 190, VI: 140, 143),

Clasa VI-a: Chiriceanu A. M. (VI: 144, 153. 154, 158*, 166), Stănculescu I. (VI: 154, 163, 165, 166, 167, 169).

Clasa VIII-a: Iotzu A. (VIII: 81, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90).

Liceul „Gh. Lazăr" Bueureşti.

Clasa V-a : Căţoiu St. St. (V : 157, 178, 179), Ionescu V. G. (V : 160, 162, 163, 184, 189*, 190), Rădulescu C. M. (V : 144*, 147, 159, 160, 177, 179).

Clasa VI-a : Decusară E. N. (VI : 148, 169), Drouhet E. E. (VI : 143, 144, 158), Popescu Al. M. (VI : 124, 157, 158*, 161), Segal I. B. (VI : 132, 142, VII : 123). VIII : 46).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa IV-a : Bente V. G. (IV : 122, 123, 124, 126, 128*, 131, 134, 135, 141), Lenart I. A. (IV: 120, 124, 126, 128*, 140, 143, 155, 156, V : 174).

Clasa V-a : Mazzetti L. F. (V : 140, 141, 144).

Clasa VI-a : Popescu Zorica N. A. (VI : 143, 147, 148).

Institutul „Schewitz Thierrin" Bucureşti.

Clasa IV-a : Anton S. A. (IV : 151, 152, 153, 155), Mihăilescu L. V. (IV : 127, 135, 140, 150, 151, 152, 153, 156).

Clasa VI-a : Mihăilescu L. A. (VI : 136, 143, 159*, 161, 169), Slomneanu I. I. (VI : 154, 158, 159, 163*, 164*, 165*, 166*, 167*, 169), Theodorescu N. (VI : 135, 136, 143), Zamfirescu G. M. (VI : 143, 158).

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa IV-a : Preciado I. T. (VI : 132, 133, 134, 135, 136, 137, 140, 142, 143, 144, 145, 146*, 147, 148, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 161*, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 169, 146, 147), Şaichin A. (VII : 132, 133, 134, 135, 137, 140, 142, 143, 147, 159, 163, 164, 166, 169, VII : 115*, 149, 150*, 154, 155, 158, VIII : 46, 60, 62, 63, 64, 75, 77, 78, 81, 82, 83, 84, 92*, 96*, 97*, 99), Silberman I. T. (VI : 148, 154, 158, 159, 161).

Liceul C. F. R. „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa V-a : Horwath I. S. (V : 152*, 157, 162, 169, 170, 179, Stoicescu C. (V : 171, 173, 184, VII : 147).

Clasa VII-a : Buzescu P. V. (VII : 135*, 136*, 137*, 138*, 139*, 140*, 141*),

Clasa VIII-a : Dimitriu St. T. (VIII : 46, 53*), Marinescu St. (VIII : 46, 68, 69, 70, 71).

Colegiul Naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa V-a : Ciurescu I. R. (V : 130, 132, 134, 157, 158, 169, 170, 179, VI : 143, 144, 151), Hariton I. I. (V : 171).

Clasa VI-a : Popescu C. H. (VI: 143), Stroescu M. (VI : 124, 143, 144).

Liceul „Cantemir Vodă" Bucureşti.

Clasa VII-a : Georgescu N. N. (VII : 126, 132).

Liceul „Mihai Viteazu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: Can I. S. (IV: 142).
Clasa V-a: Cârnaru O. (V: 144*), Constantinescu D. C. (V: 157, 158, 172, 184, 190, VII: 145).

Liceul „Gh. Şincai“ Bucureşti.

Clasa V-a: Cetăţeanu G. S. (V: 157, 158), Ionescu T. St. (V: 158).
Clasa VI-a: Cetăţeanu N. (VI: 124).

Liceul „Sf. Andrei“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Mateescu A. I. (VI: 163, 165, 169).
Clasa VIII-a: Bendorf G. (VIII: 52, 60, 61).

Liceul „Marele Voevod Mihai“ Bucureşti.

Clasa V-a: Schwartz I. (V: 179).

Seminarul Pedagogic Universitar „Titu Maiorescu“ Bucureşti.

Clasa V-a: Bodnărescu M. H. (V: 130, 132, 134, 140, 146, 147, 148, 150, 152*, 162*, 163*, 164*, VIII: 51*, 52*, 53*, 54*).

Liceul „Mihail Eminescu“ Bucureşti.

Clasa VI-a: Bădulescu V. V. (VI: 151, 165, 157).

Liceul „Ion Creangă“ Bălţi.

Clasa VII-a: Repetur D. S. (VII: 114, 116, 125, 126, 130).

Liceul „Codreanu“ Bârlad.

Clasa V-a: Galea St. C. (V: 140, 144), Toporaş St. P. (V: 134).
Clasa VIII-a: Ivănescu P. I. (VIII: 64, 68, 69, 70, 71, 81, 82, 83, 90).

Liceul „Samuil Vulcan“ Beiuş.

Clasa V-a: Ardeueanu V. A. (V: 179, VI: 143, 169, 170, 184, VIII: 81, 83), Jidanu I. C. (V: 161, 163, 172, 173, 174, 179, 184, 186, 189*, 190, VI: 156, VII: 147, 159, VIII: 61, 63, 65, 76, 80, 81, 82, 83, 86, 89*, 99), Todoran G. G. (V: 144, 159, 160, 162, 169, 170, 184, 189*, 190*, VIII: 62).
Clasa VI-a: Hera V. I. (VI: 143, 144), Văcariu P. A. (V: 138, 147 148, 149, VII: 131, VIII: 75).
Clasa VII-a: Chirvai I. V. (VII: 110*, 111*, 112*, 113*, 114*, 115*, 116, 117, 118, 119, 122*, 126*, 129*, 130*, 132, 135, 136, 137, 138, 139, 14 0 141, VII: 18, 39, 41*, 46, 48, 49).

Liceul „Andrei Şaguna“ Braşov.

Clasa V-a: Cojanu G. A. (V: 159, 160, 162), Cornica I. I. (V: 159 160, 162, 163, 166, 168).

Liceul „B. P. Haşdeu" Buzău.

Clasa V-a: GRIGORESCU N. V. (V: 146, 147, 148, 149).

Liceul „Ioniţă Asan" Caracal.

Clasa VIII-a: CLIPEA I. (VIII: 82, 83, 86, 87, 88, 90), ILIE D. I. (VIII: 31*, 46, 51, 52*, 60, 61, 62, 65, 66, 75, 80, 81, 83, 84, 86, 88, 90).

Liceul „Traian Doda" Caransebeş.

Clasa VIII-a: STANA R. (VIII: 81, 82, 83, 85, 86).

Liceul „V. Lucaciu" Carei.

Clasa VIII-a: POPOVICIU I. G. (VIII: 46).

Liceul „Dragoş Vodă" Câmpulung (Bucovina).

Clasa V-a: CORLAŢAN ST. L. (V: 134, 147, 148).

Liceul „Ortodox de băieţi" Cernăuţi.

Clasa VII-a: BREŢCANU C. C. (VII: 114*, VIII: 90), CHERNER E. E. (VII: 114*, 115*, 122*, 123, 132, 147, VIII: 46, 51*, 52*, 53*, 57), CLAIN D. (VII: 115*), CRAIOVEANU I. (147, VIII: 46, 90), FELIX M. R. (VII: 147, VIII: 46), FLOHR H. S. (VII: 114*, 115*, 122*, 123*.132, VIII: 46, 51*, 53*), GOICHMANN S. (VII: 114*, 122*, 123*, VIII: 46), MARK A. M. (VII: 132, 136, 138, 139, 140), MENDEL T. (VII: 109*, 114*, 115*, 118, 122*, 123, VIII: 46, 47, 51*, 53*, 57), ROLANT F. (VII: 114*, 115*, 122*, 123, VIII: 51*), ROMAN I. G. (VII: 114*), RUDICH A. C. (VII: 115*, 122*, 123*, 131, 132, 133), SĂVEANU L. (VII: 114*, VIII: 46, 53*), VORONCA L. (VII: 114*, 122*, 124, VIII: 42*, 46, 53*, 57).

Clasa VIII-a: BOTEZAT B. (VIII: 46, 51*), BUDZISZEWSCKI E. (VIII: 46, 51*), DEMCIUC O. (VIII: 51*, 53*), HLEUCA B. (VIII: 46, 51*, 53*), KIMMELMANN I. (VIII: 51*, 53*), LAIDOŞ A. F. (VIII: 46), PRODAN M. (VIII: 51*, 53*). RADOMSKI N. (VIII: 51*, 53*), TOCGANZ A. (VIII: 53*), VACARCIUC I. (VIII: 51*, 53*).

Şcoala de conductori şi desenatori Arhitecţi Cernăuţi.

Anul I. FAIN B. (V: 157), HORWATH T. (V: 156, 157).

Anul II. BALL I. (V: 160, 161, 162), GALERIU V. (V: 153, 156, 157, 179, 186, VI: 149, 159, VII: 147), URSU P. (V: 159, 160, 161, VI: 143, 144).

Liceul „Mircea cel Bătrân" Constanţa.

Clasa VIII-a: PAMBUCDJIAN KRICOR (VIII: 64, 66, 84, 87, 90).

Colegiul Naţional „Carol I" Craiova.

Clasa V-a: COSMIN CICEIU (V: 144*, 146, 147, 184, 189*, 190).

Clasa VII-a: POPESCU P. G. (VII: 155, 156, 159, 160, VIII: 75, 81, 83, 99).

Liceul „N. Gane" Fălticeni.

Clasa V-a: Dimitrov V. C. (V: 144, 146, 149, 150, 173, 177*, 179, VI: 140, VII: 124).

Clasa VI-a: Teşchievici G. (VI: 140, 143, 144, 169, VII: 124).

Liceul „Unirea" Focşani.

Clasa V-a: Turtoiu F. (V: 162, 184, 189*).

Clasa VII-a: Focşeneanu S. (VII: 123, 129*, 130*, 137, 138, 140),

Clasa VIII-a: Kivu C. M. (VIII: 46), Martac R. (VIII: 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 79, 80, 81, 82, 83, 85, 86, 88, 89, 90, 94, 100).

Liceul „V. Alexandri" Galaţi.

Clasa V-a: Dudea G. I. (V: 133*, 159, 160, 161, 169, 170, 171*).

Clasa VI-a: Semenescu I. M. (VI: 163*, 164, 169).

Liceul „Comunităţii evreilor" Galaţi.

Clasa V-a: Grossmann M. A (V: 153, VI: 143, VIII: 33), Weissenberg M. (V: 144*, 159, 160, 162*, 179, 184, 186, 185*, 190), VI: 144, Weissmann D. I. (V: 159, 160, 162, 184).

Clasa VI-a: Behrmann S. M. (VI: 132, 143, 144, 161, VIII: 75, 83, 88), Goldberg I. I. (VI: 132, 143, 144, VII: 147, VIII: 51*, 52*, 60, 61, 62, 75), Leibovici A. M. (VI: 138, 139, 154, 158, 159, 161*) Mayer A. L. (VI: 132, 143, 144).

Liceul „Ion Maiorescu" Giurgiu.

Clasa VI-a: Marinescu D. G. (VI: 133*, 135*, 136*, 140).

Clasa VII-a: Nedelescu-Vida N. A. (VII: 123*, 133*, 137, 155*, 156*, VIII: 75*).

Liceul „Internat" Iaşi.

Clasa VII-a: Matei D. D. (VII: 135, 136, 138, 142, VIII: 66*, 75, 81, 82, 83, 84).

Liceul „Alexandru cel Bun" Iaşi.

Clasa VI-a: Löbel W. H. (VI: 124, 143).

Liceul „Naţional" Iaşi.

Clasa VI-a: Ionescu M. C. (VI: 132, 133*, 134*, 135*, 136*, 137*, 140*, 141, 142).

Liceul „Coriolan Brediceanu" Lugoj.

Clasa V-a: Barth C. T. (V: 139, 140). Gall D. Z. (V: 134), Raminszky St. St. (V: 134), Neumann T. F. (V: 162, 179, 189*), Popoviciu C. M. (V: 166*, 168*, 177, 179).

Clasa VI-a: Stamate I. I. (VI: 140, 147, 148, VII: 147, VIII: 75).

Clasa VII-a: Berindei L. T. (VII: 129*.

Liceul „Tasse Dumitrescu“ Mizil.

Clasa IV-a: Diaconu A. C. (IV: 140, 155, 156), Ioan G. I. (IV: 114), Stănescu G. N. (IV, 155, V: 162), Teodorescu T. G. (IV: 122, 135).

Clasa V-a: Buznea C. R. (V: 134).

Liceul „Sf. Petru și Pavel“ Ploești.

Clasa V-a: Nicolescu St. (V: 132).

Clasa VIII-a: Gheorghiu D. A. (VIII: 21*, 23*, 39, 41, 52*, 63, 64, 65, 81, 82, 83, 85, 87, 88).

Liceul „Regele Ferdinand“ Râmnicu-Sărat.

Clasa VI-a: Oroveanu D. T. (IV: 143).

Liceul „Roman Vodă“ Roman.

Clasa V-a: Raianu M. N. (V: 159, 160, 162).

Liceul „Enăchiță Văcărescu“ Târgoviște.

Clasa IV-a: Agastein D. F. IV: 143, V: 179).

Clasa VIII-a: Spirescu V. (VIII: 34, 35).

Liceul „Papiu Ilarian“ Tg. Mureș.

Clasa VII-a: Mainhardt G. (VII: 102, 103).

Liceul „D. A. Sturdza Tecuci“.

Clasa VIII-a: Andronic M. (VIII: 36).

Liceul „C. Diaconovici Loga“ Timișoara.

Clasa VI-a: Proceanu M. (IV: 110, 111, 112, 116, Vasilescu Stabu A. M. (IV: 109, 120*, 121*, 122*, 123*, 124, 125*, 126*, 127, 128*, 129*, 141, 144, 145*, 154, 155*, V: 100, 146*, 147*, 148*, 149*, 150*, 152*, VI: 113*, 116*, 133*, 134*, 135*, 136*, 137*, 138, 139, 140*, 141, VII: 112*, 115*, 127(, VIII: 41*, 46).

Clasa V-a: Ciugudeanu C. (V: 100), Evuțeanu G. (V: 109), Morariu T. (VII: 102, 103), Nicolau L. M. (V: 100, 144, 159, 160, 162, 169, 170, 178*, 179), Stavrescu G. (V: 100), Trăilescu V. St. (V: 134, 140, 141, 169, 170).

Clasa VI-a: Nicolau L. L. (VI: 124, 143, 144, 158, 159).

Clasa VII-a: Kornis E. (VII: 114*, 116, 117, 118, 137, 138, 139, 141, VIII: 39, 41).

Clasa VIII-a: Dimitrievici I. (VIII: 82, 83), Mihailovici P. (VIII: 81, 82, 83, 84, 85, 90).

Liceul Confesional israelit Timișoara.

Clasa VII-a: Vermes E. P. VII: 107*, 108*, 115*, VIII: 39).

Liceul „Traian“ Turnu Severin.

Clasa IV-a: Boiangiu D. D. (IV: 120, 123, 124), Florescu I. M. (IV: 155, 156, V: 159, 160, 161, 166, 168, 172, 173, 179) Petai A. R. (IV: 126*), Scurtu G. P. (IV: 108*, 128*).

Clasa V-a: Armeanu N. S. (V: 159, 160, 161, 166, 168), Coifan S. V. (V: 100, 134, 140, 161, 169, 170), Ghenea V. G. (V: 162), Mitea M. (V: 100), Modâlcă E. (V: 100).

Clasa VI-a: Baba I. (VI: 124, 131), Fortuna N. I. (VI: 124), Tilică C. St. (VI: 131, VII: 102, 103, 138).

Clasa VIII-a: Stoenescu M. (VIII: 81*, 86, 88, 89*, 90).

Liceul militar „Ştefan cel Mare“ Cernăuţi.

Clasa V-a: Mătieş E. M. (V: 157, 169), Moţoc L. R. (V: 169, 170).

Clasa VI-a: Boşoldea G. G. (VI: 124), Ionescu M. (VI: 124), Lazăr T. A. (VI: 143, 144, 147, 150, 151), Nedelcu V. N. (VI: 143, 144, 147, 148, 149, 150, 151), Nistorescu V. D. (VI: 124, 126*, 128*, 142, 143, 147, 148), Russu E. (VI: 123, 128), Teodorescu D. N. (VI: 124, 127), Tomescu T. (VI: 143, 144, 147, 149, 151).

Clasa VII-a: Caraman D. V. (VII: 135*, 138*, 139*, 140*, 141), Tanasiciuc V. C. (VII: 135, 137, 138, 139, 140, 141).

Clasa VIII-a: Maftei M. C. (VIII: 60)

Liceul militar „Regele Ferdinand“ Chişinău.

Clasa V-a: Bălăuţă A. (V. 186), Burghelea C. (V. 189*), Soroceanu C. (V: 173), Zolotovici I. D. (V: 179, 186).

Clasa VII-a: Bazac I. A. (VII: 149, 150*, VIII: 90).

Clasa VIII-a: Muscinscki V. G. (VIII: 81, 83, 85, 86).

Liceul militar „D. A. Sturdza“ Craiova.

Clasa IV-a: Bădescu F. C. (IV: 109, 134, 140), Bărbulescu I. (IV: 135), Ciobanu V. (IV: 135), Constantinescu S. F. (IV: 110, 112, 113, 114, 115, 116).

Clasa V-a: Ciovârnache A. (V: 169, 170), Ciupag St. H. (V: 157), Enescu D. D. (V: 157, 169, 170), Enescu D. G. (V: 134, 157, 169, 170), Lupu I. G. (V: 170), Mădan I. (V: 169, 170), Muraru P. D. (V: 157, 169, 170), Neagoe D. G. (V: 157), Neguţi I. N. (V: 132, 134).

Clasa VI-a: Boian D. E. (V: 154, 158, 159, 161*), Cioc I. D. (VI: 143, 144, 150, 153, 154, 155*, 156, 157, 158*, 161*, 162*, VIII: 81*, 82, 83, 84, 86), Ghidirmic St. (VI: 143, 144), Graur A. (VI: 161*), Ionescu Fulger M. C. (VI: 154, 158, 159, 161*), Paşoiu N. M. (VI: 127, 128, 143, 144, 150), Popescu M. G. (VI: 154, 156, 158*, 159, 161*, VIII: 81, 82, 83, 84), Stan L. (VI: 143).

Clasa VII-a: Constantinescu C. C. (VII: 129, 130, 131*, 132), Popescu P. G. (VII: 147).

Clasa VIII-a: Drăghiceanu I. (VIII: 52*, 80, 81, 82, 83, 85, 86, 87, 90), Frăsil T. (VIII: 79, 81, 82, 83, 85), Teișanu S. (VIII: 79, 81, 82, 83, 85, 86, 87, 91) Vasilescu N. (VIII: 65, 79, 81, 83, 85, 86. 90).

Liceul militar Iași.

Clasa V-a: Popovici V. A. (V: 158, 160).

Liceul militar „N. Filipescu" M-rea Dealu Târgoviște.

Clasa VI-a: Anastasiu M. (IV: 121*, 122*, 125, 128*), Heroiu N. S. (IV: 121*, 122*, 123*, 125, 126*, 127*, 128*, 144, V: 146*, 147*, 148*, 150*, VI: 133*, 134*, 139*, 140*, VII: 129*, 130*, 131), Teodorescu N. D. (IV: 96, 110, 111, 114, 115, 116, V: 134, 139, 140, VI: 143, 144).

Clasa V-a: Popescu S. (V: 139*).

Clasa VI-a: Belloiu B. D. (VI: 124, 143, 144, 146, 149, 151, 153, 154, 156, 157, 158, 161*, 163, 164, 165, 166, 167, 169, VII: 137, 151, 159, VIII: 46, 60, 74, 75, 81, 83, 86, 90, 94, 99), Guțulescu N. A. (VI: 142, 153, 154, 161*, 163, 166, 169, VIII: 60, 61, 62, 63, 64, 81, 83), Negulescu D. S. (VI: 124).

Liceul militar „Mihai Viteazul" Târgul Mureș.

Clasa IV-a: Costea D. (V: 162), Mingea M. (V: 157), Zeveleanu G. (V: 162).

Clasa V-a: Tătaru N. N. (V: 157, 159, 161, 163, 169, 170).

Clasa VI-a: Drăgulescu G. G. (VI: 124, Mosora N. N. (VI: 136, 143, 144), Sechel M. (VI: 123, VII: 103), Tofan T. (VII: 102, 103), Toma N. N. (VI: 136, 137, 143, 144, 148).

EXERCIȚII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 167.* Un taxator de tramway vinde într'un singur drum bilete a *5* lei, corespondențe a *6* lei și abonamente a *24* lei, în valoare totală de 420 lei. Știind că numărul călătoriilor indicat de abonamentele vândute este egal cu numărul călătoriilor indicat de corespondențele vândute mai puțin *călătoriile* indicate de biletele de *5* lei, se cere să se afle câte bilete din fiecare categorie a putut să vândă taxatorul.

(Se va ține seamă că taxatorul nu poate vinde decât bilete întregi).

H. I. B.

IV. 168. Fie P şi P′ două plane perpendiculare, care se tae după o dreaptă Δ şi două triunghiuri echilaterale ABC şi A′B′C′ egale şi situate respectiv câte unul în fiecare din cele două plane, aşa încât laturile AB şi A′B′ sânt paralele cu Δ.

Ştiind că proecţiunile punctelor A , A′ ; B, B′ ; şi C, C′ pe Δ se confundă respectiv în A″, B″, C″ şi că : $\overline{AB} = a$, $\overline{AA''} = \overline{A''A'} = b$, să se afle volumul şi suprafaţa laterală a solidului ABCC′B′A′.

H. I. B.

IV. 169. Aceeaşi problemă pentru cazul când triunghiurile egale sunt înlocuite prin două trapeze isoscele egale, baza mică fiind egală cu una din laturile neparalele şi egală cu jumătatea bazei mari; iar una din laturile neparalele fiind paralelă cu dreapta Δ.

H. I. B.

IV. 170. Aceeaşi problemă pentru cazul când triunghiurile egale sunt înlocuite prin două exagoane regulate egale, una din laturi fiind paralelă cu dreapta Δ.

H. I. B.

IV. 171. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{1}{a}\left(\frac{x}{b}-\frac{y}{c}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{x}{c}-\frac{y}{a}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1$$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{x}{c}+\frac{y}{b}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{c}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{a}\right)=2.$$

C. I. B.

IV. 172. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$\frac{1}{a}\left(\frac{x}{b}-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{x}{c}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{b}\right)=0.$$

C. I. B.

IV. 173. Un trapez isoscel ABCD are baza mare $\overline{BC} = 18$, baza mică $\overline{AD} = 6$ și perimetrul egal cu $12(2+\sqrt{2})$.

Se construiește dreptunghiul CDEF (CD fiind una din laturile egale ale trapezului) așa fel încât trapezul și dreptunghiul să nu fie de aceeași parte a dreptei CD, iar $\overline{DE} = 10\sqrt{2}$.

a) Să se arate că volumul corpului obținut prin rotația trapezului ABCD în jurul dreptei CD este a treia parte din volumul corpului obținut prin rotația triunghiului BCD în jurul dreptei EF.

b) Pe tangenta în B la cercul descris de punctul B în rotația în jurul dreptei EF se ia punctul G.

Să se dovedească relația:

$$2\overline{AG}^2 + \overline{DG}^2 = 2\overline{BG}^2 + \overline{CG}^2.$$

C. I. B.

IV. 174. Să se arate că suma

$$9\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - 24\left(a + \frac{1}{a}\right) + 34$$

este un patrat perfect.

GH. B.

IV. 175. Pe muchiile SA, SB, SC, SD, ale unei piramide cu baza un patrat ABCD se iau punctele A′; B′; C′; D′; așa că:

$$\overline{SA'} = \overline{BB'} = \overline{SC'} = \overline{DD'} = \frac{\overline{SA}}{3}.$$

Știind că $AB = a$ și că A″, B″, C″, D″ sunt mijloacele dreptelor $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'A'}$ să se afle aria (A″B″C″D″).

H. I. B.

IV. 176. Mai mulți elevi veniți în București la *Concursul „Gazetei Matematice"* s'au dus în Cișmigiu să se plimbe cu bărcile pe lac.

Așezându-se câte 3 într'o barcă, ar mai fi rămas libere 2 bărci, iar unul din elevi ar fi trebuit să renunțe la plimbare, nemai fiind tovarăși.

Dacă însă s'ar fi aşezat câte 2 într'o barcă, 4 dintre elevi ar fi trebuit să renunţe la plimbare, nemai fiind bărci libere.

Să se afle numărul elevilor şi al bărcilor libere de care puteau dispune.

N. B.

IV. 177. In planul P se dă un trapez ABCD, în care baza mică ($BC = a$) este egală cu înălţimea şi a treia parte din baza mare AD. Prin AD se duce un plan P' perpendicular pe planul P şi se ia în acest plan trapezul AB'C'D egal cu trapezul ABCD.

Să se afle: 1) volumul solidului ABCDC'B'.

2) aria suprafeţei ce mărgineşte acest solid.

H. I. B.

IV. 178. In cazul aceleiaşi probleme să se afle aria secţiunei ce se obţine tăind solidul ABCDC'B' cu un plan ce trece prin punctul B' şi dreapta CD.

H. I. B.

IV. 179. Un triunchiu de con circular, are razele bazelor de $1m$, $3m$ şi înălţimea $2m$. Să se afle înălţimea, volumul şi suprafaţa laterală a conului din care provine trunchiul şi volumul şi suprafaţa laterală a trunchiului de con.

N. M.

Clasa V-a. *Exerc. 193.* Se dau două cercuri concentrice C şi C' de raze respectiv r şi $2r$. Tangenta în A la cercul C tae pe C' în M, N; iar tangenta dusă din M la cercul C tae pe C' în L.

Să se arate că LN e tangentă la cercul C.

C. I. B.

V. 194. Se dau cercurile C_1, C_2, C_3 concentrice, de raze r, $2r$, $4r$. Tangenta în A la cercul C_1 taie C_2 în M, N; tangenta dusă din M la C_2 tae C_3 în P, Q. Să se arate că dreapta PN este tangentă la C_2 şi că dreapta NQ trece prin centru.

C. I. B.

V. 195. Se dă un cerc de rază R. Să se construiască trapezul isoscel circumscris, a cărui arie să fie $5R^2$.

C. I. B.

V. 196. Se dă un cerc de rază R. Să se construiască trapezul isoscel circumscris, al cărui perimetru este 10R.

C. I. B.

V. 197. Printr'un punct din plan se duc patru cercuri egale, celelalte puncte de intersecție ale lor sunt mijloacele laturilor și diagonalelor unui patrulater inscriptibil.

A. G.

V. 198. Fie AH înălțimea triunghiului BAC dreptunghic în A și D simetricul lui H față de mijlocul lui $\overline{BC}$. Să se demonstreze că dacă E și F sunt proiecțiunile lui D pe AC și AB, atunci:

$$\overline{BC} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{DF} = \overline{AH}^3.$$

GH. B.

V. 199. Fie ABCD un trapez isoscel cu laturile egale AB și CD. Din C se duce paralelă la diagonala BD, care tae pe AD în M. Să se demonstreze că triunghiul ACM este isoscel.

GH. B.

V. 200. Se dă o dreaptă (Δ) și un punct P și se cere să se ducă prin P o dreaptă care să facă cu dreapta dată un unghiu de $37^0 30'$.

H. I. B.

V. 201. Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației

$$x^2 - ax + a^2 = 0$$

să se calculeze expresiile:

$$x_1^{2n} + x_2^{2n} \; ; \; x_1^{3n} + x_2^{3n} \; ; \; x_1^{5n} + x_2^{5n}.$$

H. I. B.

V. 202. Să se scrie direct ecuația ale cărei rădăcini sunt mai mari cu a decât rădăcinile ecuației:

$$x^2 + mx + m^2 = 0.$$

H. I. B.

V. 203. Pe una din bazele AB sau BC ale unui trapez ABCD să se găsească punctele P care au proprietatea că cercurile de diametru $\overline{PC}$ sau $\overline{PD}$, trec prin intersecția dreptelor neparalele AD și BC.

H. I. B.

V. 204. Să se rezolve ecuția:

$$x^2 - 10x + \lambda = 0,$$

rădăcinile ei fiind legate de relația:

$$x_1^2 + x_2^2 + \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = 3x_1x_2.$$

M. N.

V. 205. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul O. Să se afle pe latura BC un punct M, astfel ca tangenta dusă din el la cerc să fie media proporțională a laturilor AB și AC. Să se verifice că în cazul triunghiului echilateral de latură a, $A'M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ A' fiind mijlocul laturei BC.

N. M.

V. 206. Se dă trapezul isoscel ABCD cu baza mare AD, baza mică BC și BC = AD = CD. Din punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD ca centru se descrie un cerc ce trece prin B și taie pe AD în A' și D'. Să se arate:

1^0 — $BA' \perp AA$; $CD' \perp BD$.

2^0 — mijloacele laturilor AB și CD și punctele de intersecție dintre dreptele BA' și AC ; CD' și BD sunt în linie dreaptă.

H. I. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 173.* Să se stabilească identitatea:

$$1 - 2\cos^2 3a = \cos 2a\,(1 - 2\cos 4a).$$

C. I. Ţ.

VI. 174. Să se stabilească identitatea:

$$\cos 2a\,(1 - 4\sin^2 2a) = 15\,(\sin^4 a - \cos^4 a) - 16\,(\sin^6 a - \cos^6 a).$$

C. I. Ţ.

VI. 175. Să se arate că într'un triunghiu oarecare avem relaţia:

$$4\,\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leqq \sin A + \sin B + \sin C.$$

C. I. Ţ.

VI. 176. Să se verifice, între laturile şi unghiurile unui triunghiu, relaţiile:

$$a^2 = b^2\cos 2C + c^2\cos 2B + 2bc\cos(B - C)$$

$$0 = -b^2\sin 2C + c^2\sin 2B + 2bc\sin(B - C).$$

N. M.

VI. 177. Intr'un triunghiu dreptunghiu

$$a^2 = (c^2 - b^2)\cos 2B + 2bc\sin 2B$$

$$(c^2 - b^2)\sin 2B = 2bc\cos 2B.$$

N. M.

VI. 178. Să dă o sferă de rază R. Să se construiască trunchiul de con circumscris, al cărui volum este $8\pi R^3$.

C. I. B.

VI. 179. Se dă o sferă de rază R. Să se construiască trunchiul de con circumscris a cărui arie laterală este $5\pi R^2$.

C. I. B.

VI. 180. Un trapez isoscel ABCD are baza mare $\overline{BC} = 6a$, baza mică $\overline{AD} = 2a$ și perimetrul egal cu $4a(2+\sqrt{2})$. 1°. Să se afle volumul corpului S format când se rotește ABCD în jurul dreptei CD

2°. La ce distanță de CD trebuie dusă o paralelă xy dreptei CD, pentru ca volumul corpului S' rezultat din rotirea trapezului ABCD în jurul axei xy să fie în raportul k cu volumul corpului S.

3°. Pe tangentele în A și B la cercurile corpului S' trecând prin A și B se ia respectiv segmentele $\overline{AF} = b$, $\overline{BE} = 3b$.

Să se arate că dreptele CE și DF sunt în același plan. Să se calculeze lungimea segmentului $\overline{CE}$.

C. I. B.

VI. 181. Există într'un plan puncte astfel ca distanțele lor la trei plane date să fie proporționale cu numerele a, b, c? Dar pe o sferă?

A. G.

VI. 182. Există într'un plan dat puncte ale căror distanțe la două plane date să fie într'un raport dat m? Dar pe o sferă dată?

A. G.

VI. 183. Fie două patrate ABCD și A'B'C'D' egale, în plane paralele și rotite unul față de cellalt cu 45°. Se cere volumul solidului AA'BB'CC'DD'A, a fiind latura patratului și h distanța între cele două plane.

A. G.

VI. 184. Fie două poligoane regulate de n laturi $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ și $B_1B_2B_3 \ldots B_n$ egale, așezate în plane paralele și rotite unul față de altul cu unghiul $\frac{\pi}{n}$. Se cere volumul solidului $A_1B_1A_2B_2 \ldots A_n B_n A_1$.

A. G.

VI. 185. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} 4x + \operatorname{cosec} 4x.$$

C. I. Ț.

Clasa VII-a *Exerc. 164.* Fie A mijlocul segmentului de dreaptă $\overline{BC}$. Un mobil M descrie cu o mişcare uniformă cercul de diametru AB. Dreapta AM tae perpendiculara în C pe AB în punctul N.

Să se studieze mişcarea punctului N. Să se arate că viteza v a lui este dată de relaţia

$$v + v_0\left(1 + \frac{x^2}{d^2}\right) = 0,$$

v_0 fiind viteza lui M pe cerc, x distanţa $\overline{CN}$ şi $d = \overline{AB}$.

N. M.

VII, 165. Fie $f(x, y) = x^y \cdot y^x$.

Să se arate că

$$f \cdot f''_{xy} - f'_x \cdot f'_y = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot f^2$$

N. M.

VII. 166. Se dă funcţiunea

$$\operatorname{tg}\frac{x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = 0.$$

Să se arate că:

$$x \cdot y' + y = 0.$$

C. I. B.

VII. 167. Se dă funcţiunea:

$$x^3 + xy + y^3 = 0.$$

Să se afle valorile maxime şi minime ale lui y.

C. I. B.

VII. 168. Se dau în plan n puncte astfel că *trei* oarecare nu sânt în linie dreaptă, iar *patru* oarecare nu sunt pe un acelaş cerc. Se întreabă câte cercuri se pot construi trecând prin câte trei din aceste puncte şi care e maximul numărului punctelor lor de intersecţie.

A. G.

VII. 169. Numărându-se în două moduri grupele ce conțin p obiecte anumite, din tabloul combinărilor a n obiecte luate câte m $(p < m < n)$, să se deducă identitatea

$$C_n^m = \sum_{i=0}^{i=p} C_p^i C_{n-p}^{m-i}.$$

A. G.

VII. 170. Să se afle valoarea expresiei:

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg}x} + \mathrm{L}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{ae^{\operatorname{tg}x} - \mathrm{L}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

H. I. B.

VII. 171. Să se afle valoarea expresiei:

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg}x} + \sin x\right]^{\operatorname{tg}x}.$$

H. I. B.

VII. 172. Să se afle natura seriei cu termenul general:

$$u_n = \frac{\operatorname{arctg}\frac{a}{n}}{1 + \arccos\frac{b}{n}},$$

a și b fiind două consțante.

H. I. B.

VII. 173. Să se studieze natura seriei cu termen general:

$$u_n = \frac{n}{n^b + a^2},$$

a și b fiind două constante.

H. I. B.

VII. 174. Să se verifice egalitatea:

$$\operatorname{arctg}\frac{21}{55} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2143} = \operatorname{arctg}\frac{13}{34}.$$

C. I. Ț.

VII. 175. Să se verifice egalitatea:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{3}{8}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{46}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{2}{5}\,.$$

C. I. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc 101.* Să se determine a şi b astfel ca polinomul: $P(x)\equiv 2x^6+x^5+ax^4+3x^3+bx^2-16x+4$ să fie divizibil cu $(x+2)^2$.

Inlocuind pe a şi b cu valorile găsite, să se descompună polinomul în factori, ştiind că admite rădăcini multiple.

G. D. S.

VIII. 102. Din considerarea produsului:

$$(\cos 3x+i\cos x)(\sin 3x+i\sin x),$$

să se stabilească identitatea:

$$(\cos^2 3x+\cos^2 x)(\sin^2 3x+\sin^2 x)=\sin^2 2x\,.\,(4\cos^2 2x+\cos^2 4x).$$

N. M.

VIII. 103. Se consideră elipsa:

$$\left(\frac{x-5}{3}\right)^2+y^2=1,$$

de vârfuri A, A'; B, B' şi focare F, F'. Tangentele în M (0, 1) la elipsă, o ating în B şi E. Dreapta DE tae axa OX în G. Avem:

$$\frac{2}{OG}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}\;\sphericalangle(ME\,,\,MF')=\sphericalangle(MF\,,\,OX)$$

$$\sphericalangle(ME\,,\,MF)=\sphericalangle(MF'\,,\,OX).$$

N. M.

VIII. 104. Să se arate că:

$$(i+1)^{6n}=(-4)^n\,.$$

A. G.

VIII. 105 Intr'un triunghiu ABC, punctul I fiind intersecția dreptelor (cevienelor) AA', BB', CC', să se stabilească, prin considerațiuni de mecanică relațiunile:

1°. $$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} + \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$$

2°. $$\frac{\overline{AI}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{BI}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{CI}}{\overline{CC'}} = 2$$

3°. $$\frac{\overline{IA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{IB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{IC'}}{\overline{CC'}} = 1.$$

A. G.

VIII. 106. Dacă a, b, c sunt cantități toate pozitive sau toate negative, ecuația

$$x^3 + ax^2 - (b + c)\,x - ab = 0$$

are rădăcinile reale.

N. B.

VIII. 107. Să se calculeze diferențiala funcțiunii:

$$y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}\,.$$

A. A. R.

VIII. 108. Să se determine p astfel ca ecuația:

$$x^3 + px^2 + 16x - 12 = 0$$

să se admită o rădăcină dublă.

A. A. R.

VIII. 109. Să se arate că:

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 3} = \log \frac{2x - 3}{x - 1} + C.$$

A. A. R.

VIII. 110. Să se calculeze integrala

$$\int \frac{(6x^2+1)\,dx}{\sqrt{1-x^2(2x^2+1)}}.$$

A. A. R.

VIII. 111. Să se găsească un număr pozitiv α, astfel ca pentru $|x| < \alpha$ valoarea polinomului

$$x^6 - 5x^5 + 8x^3 - 2x^2 + x$$

să rămână cuprinsă între $-0{,}001$ şi $+0{,}001$.

A. A. R.

VIII. 112. Să se aducă la forma

$$x^3 + px + q = 0$$

ecuaţia:

$$2x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0.$$

A. A. R.

VIII. 113. Se dă ecuaţia:

$$A_0x^5 + A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x + A_5 = 0.$$

Să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini să fie de trei ori mai mici decât rădăcinile ecuaţiei date.

A. A. R.

VIII. 114. Să se determine p şi să se rezolve ecuaţia:

$$x^4 + px^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

ştiind că propusul a două rădăcini este egal cu 4.

A. A. R.

VIII. 115. Să se calculeze aria cuprinsă între curbele:

$$y = \operatorname{tg} x \ , \ Y = \frac{2x}{\pi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

şi dreptele $x = 0$ şi $x = \frac{\pi}{2}$.

G. D. S.

Pentru toate clasele. *Exerc. 1.* Să se demonstreze că dacă:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

se divide prin:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

câtul este neapărat un număr pereche.

GH. B.

T. C. 2. Pentru ce valori ale lui n, câtul dela exerciţiul precedent este un patrat perfect?

GH. B.

T. C. 3. Să se găsească o cifră a, care împreună cu cifrele 1, 3, 9 luate într'o ordine anumită să formeze un patrat perfect de patru cifre.

GH. B.

T. C. 4. Fie $abcde$ un număr de 5 cifre. Să se demonstreze că dacă una din cifrele acestui număr este dublul sumei celorlalte cifre, atunci numărul se divide cu 3.

GH. B.

T. C. 5. Să se găsească fracţiunile subunitare ale căror termeni au produsul 1936.

GH. B.

T. C. 6. Dacă $n > 1$, produsul $n(n+3)$ nu poate fi pătrat perfect.

GH. B.

T. C. 7. Să se demonstreze că numerele întregi de forma: $x^2 \pm x + 1$ sunt totdeauna prime cu 5.

GH. B.

T. C. 8. Să se demonstreze că ultimele cinci cifre ale patratului lui N sunt identice cu ultimile cinci cifre ale patratului lui $N + 25.000$ sau ale patratului lui $N + 50.000$, după cum N este pereche sau nepereche.

GH. B.

T. C. 9. Fie a şi b numere de câte o cifră şi $mnpqrs$ patratul de şase cifre al numărului de trei cifre aob. Să se demonstreze, că dacă $2 \times a \times b < 100$, atunci patratul lui boa este $rspqmn$.

GH. B.

T. C. 10. Să se demonstreze că numărul ce se obţine sporind cu 2 toate cifrele unui patrat perfect nu poate fi patrat perfect.

GH. B.

T. C. 11. Să se demonstreze că suma

$$8n^2 - 7n - 1$$

se divide prin 25 numai dacă unul din numerile $n - 1$ sau $8n + 1$ se divide prin 25.

GH. B.

T. C. 12. Să se demonstreze că fracţiunea

$$\frac{n^3 + 2n + 1}{n(n^2 - 1)}$$

generează o fracţiune zecimală periodică mixtă.

GH. B.

T. C. 13. Să se găsească cel mai mic număr, care să aibă 1936 divizori.

GH. B.

T. C. 14. Se cere un număr întreg de forma $a^{\alpha} b^{\beta}$, care să admită 15 divizori, a și b fiind numere prime.

GH. B.

T. C. 15. Să de demonstreze că $c . m . m . d . c .$ al numerelor $2^p - 1$ și $2^q - 1$ este un număr de forma $2^n - 1$, atunci când p și q sunt primi.

GH. B.

T. C. 16. Să se determine numărul $1a1b1$ divizibil prin 11.

I. L.

T. C. 17. Dacă a și b sunt prime cu 7, atunci $(a^2 + 2b^2)$ nu poate să fie divizibil cu 7. Idem $(a^3 + 2b^3)$.

I. L.

Erată. 1. La Ex. IV: 158, ultima paranteză este $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ în loc de $\frac{1}{a} + \frac{1}{c}$.

2. La VII: 146, se va înlocui $(2ab)$ prin $(2ab)^4$.

---

1. Soluțiunile exercițiilor publicate în numerele 7, 8, 9 se primesc până la 1 Septembrie și vor fi redactate după „Instrucțiunile" publicate în Nr. 1, pag. 24.

2. Elevii din clasele VI, VII și VIII cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică".

„Gazeta Matematică" apare la 15 al fiecărei luni. Costul abonamentului este 200 lei și se trimite la „Casa Gazeta Matematică" Calea Griviței 158 — București 2.

3. Nr. 1. Anul III al Suplimentului cu exerciții al „Gazetei Matematice" apare la 1 Octomvrie 1936. Abonamentul este 50 lei anual și se trimite la „Casa Gazeta Matematică", Calea Griviței 158 — București 2.

Drepturile de reproducere rezervate „Societății Gazeta Matematică".

MONITORUL OFICIAL ŞI
IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
BUCUREŞTI
1936

Nr. 1–

BIBLIOTECA CENTRALA
„ASOCIATIUNII"
SIBIIU